

Universidad Nacional
Autónoma de México y
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo



Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

El grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables

T E S I S

que para optar por el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta

Adal Téllez Sánchez

TUTOR PRINCIPAL:
Dr. Reynaldo Rojas Hernández
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo

Morelia, Michoacán, México.
Septiembre, 2025

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Gabriela

Agradecimientos

A la UNAM y a la UMSNH por permitirme ser estudiante del programa de Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas.

Agradezco a mi director de tesis, el Dr. Reynaldo Rojas Hernández, por su apoyo y paciencia en la realización de este trabajo.

Al programa de CONACyT mediante su apoyo de beca a lo largo de toda esta maestría.

Agradezco a mis sinodales: Dr. Ulises Ariet Ramos García, Dr. Fernando Hernández Hernández, Dr. Osvaldo Guzmán González y al Dr. Alejandro Ramírez Páramo por su tiempo en revisar este trabajo y dar sus observaciones para mejorarlo.

Un agradecimiento especial a Gabriela Gárate Cahuantzi por su amor, cariño, comprensión. Por haberme acompañado todos los años que duró este proyecto. Tu amor y apoyo incondicional son siempre una constante fuente de fortaleza.

A mi familia y amigos que, a pesar de la distancia, siempre los sentí cerca en mis momentos más difíciles en estos años. Gracias por su confianza, sus ánimos y cariño.

Introducción

La temática de esta tesis se encasilla dentro de la Topología General. Particularmente, se estudian algunas propiedades sobre el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables. La finalidad de este texto es exponer una caraterización de este concepto en las dendritas y dendroides.

El estudio de las propiedades de los espacios métricos, compactos y conexos (continuos) inició a principios del siglo XX en Europa, cuyos principales colaboradores fueron Z. Janiszewski, W. Sierpiński, S. Mazurkiewicz, B. Knaster, K. Kuratowski y K. Borsuk. Como se menciona en [15], aunque este objeto es principalmente estudiado por topólogos, también aparecen de manera natural en las ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos, física y química.

El libro Continuum Theory: An Introduction, escrito por Sam B. Nadler Jr., fue el primero en reunir los principales resultados acerca de los continuos de Peano y las dendritas. Las demostraciones de los teoremas sobre estos conceptos, presentados en este trabajo, se pueden encontrar en ese libro.

Debido a que el área de Teoría de Continuos tiene un estudio bastante extenso alrededor de distintos conceptos como la propiedad de punto fijo, el pseudoarco, la indescomponibilidad, los límites inversos, entre muchos otros (véase [12]); esta tesis se enfoca principalmente sobre el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables, aunque este término es atribuido a Bennet en [22], los primeros resultados se obtuvieron por G. Cantor quien en 1895, en su artículo *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* [8] sentó un antecedente acerca del grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables. Efectivamente, probó que para dos subconjuntos densos numerables M y N de un intervalo abierto en la recta real existe un homeomorfismo del intervalo en sí mismo, que puede ser tomado creciente o decreciente, tal que la imagen de M es igual a N.

Muchas contribuciones alrededor de este concepto fueron hechas durante 1980 por B. Fitzpatrick and Z. Hao-xuan [3, 4, 5]. En años más recientes, J. van Mill y otros autores han seguido investigando este concepto, véase [19, 20]. Por lo que, el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables sigue siendo un tema investigación vigente.

Este trabajo se basa en el artículo *Countable dense sets of dendrites* [27] de los autores Rafael E. García-Becerra, María de J. López y Patricia Pellicer-Covarrubias. El objetivo es dar una exposición más detallada de sus resultados para tener una mejor comprensión de éstos e introducirnos al mismo tiempo en la investigación que actualmente se realiza en estos temas.

La exposición de los resultados está organizada en cuatro capítulos. En el primero se incluyen algunos conceptos de topología general relacionados con árboles, dendritas y dendroides; además se presentan resultados importantes expuestos en su mayoría en [28], que son fundamentales en el estudio de estos

objetos y que serán útiles en las demostraciones de los resultados en los siguientes capítulos.

En el Capítulo 2, se introduce la definción del grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables y se trabaja este concepto en los árboles.

En el Capítulo 3, se demuestra una caracterización al grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en las dendritas, mostrando que solo ocurren tres casos; es finito, ω o $\mathfrak{c}$. De hecho, se muestra que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en las dendritas que no son árboles es ω si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Todo arco contiene una cantidad finita de puntos de ramificación.
2. Contiene una cantidad finita de puntos de orden ω.
3. Contiene una cantidad finita de arcos cuya cantidad de puntos de ramificación es distinta.
4. Contiene una cantidad finita de puntos de orden finito o ω.

Finalmente en el Capítulo 4, se da una caracterización del grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en los dendroides mostrando igualmente que solo ocurren tres casos; es finito, ω o $\mathfrak{c}$. De hecho, se muestra que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en los dendroides es ω si y sólo si es una dendrita que no es árbol o se cumplen las cuatro condiciones mencionadas anteriormente. Luego, se concluye el capítulo trabajando con los espacios fuermente homogéneos respecto a subconjuntos densos numerables y se caracteriza esta clase de espacios como la clases de espacios numerables y discretos.

Un lector con antecedentes en un curso básico de topología general puede iniciar la lectura de esta tesis en el primer capítulo. Mejor aún, si tiene alguna experiencia con las propiedades topológicas de árboles, dendritas y dendroides puede avanzar la lectura directamente en el segundo capítulo. Sin embargo, algunos conceptos de esta teoría serán recordados cuando sea necesario.

Índice general

Agradecimientos I
Introducción II

1. Preliminares **1**
1.1. Nociones básicas 1
1.2. Continuos de Peano 5
1.3. Dendritas 7
1.4. Resultados auxiliares sobre dendritas 9

2. Grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables **16**
2.1. El grado de homogeneidad $d_{CDH}(X)$ 16
2.2. El grado de homogeneidad en árboles 17

3. Caracterización de $d_{CDH}(X)$ en dendritas **22**

4. Caracterización de $d_{CDH}(X)$ en dendroides **37**
4.1. Fuertemente homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables 41

Bibliografía **44**

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se exponen algunas nociones y resultados básicos de la topología general y de teoría de continuos, los cuales son necesarios para el desarrollo de esta tesis.

1.1. Nociones básicas

En todo el escrito se utiliza la siguiente notación: $\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales y $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ denota al conjunto de números naturales.

El conjunto vacío es representado por el símbolo $\emptyset$. Dados dos conjuntos A y B, $A \subset B$, $A \setminus B$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$ y $\mathcal{P}(A)$ denotan la contención, la diferencia, la unión, la intersección, el producto cruz y la potencia de los conjuntos A y B, respectivamente. Además, A^n denota la n-ésima potencia de un conjunto A. Por otro lado, para un subconjunto Z de $\mathbb{R}^2$ y $a \in \mathbb{R}$ el símbolo aZ se refiere al conjunto $\{(ax, ay) : (x, y) \in Z\}$.

Las familias de conjuntos se denotan mediante $\{A_i : i \in I\}$, donde A_i son los conjuntos y la letra I el conjunto de índices. Además, las operaciones de unión, intersección y producto se expresan respectivamente por

$$\bigcup_{i \in I} A_i, \ \bigcap_{i \in I} A_i \text{ y } \prod_{i \in I} A_i.$$

Se denota por $f : X \to Y$ a una función que tenga como dominio a X y toma valores en Y mientras que su función inversa se denotará por f^{-1}. Ahora, la imagen de un conjunto A bajo la función f y la preimagen de un conjunto A serán por $f[A]$ y $f^{-1}[A]$, respectivamente.

Recordemos que $|X|$ denota la cardinalidad del conjunto X. La relación $|X| \leq |Y|$ expresa, la existencia de una función inyectiva de X a Y o la existencia de una función sobreyectiva de Y a X. Las operaciones de sumas y producto de

cardinales se usan como en [7]; los simbolos ω y $\mathfrak{c}$ simbolizarán la cardinalidad de $\mathbb{N}$ y de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, respectivamente. Cabe destacar que éstos son los cardinales más importantes para esta tesis.

Por un espacio X se entiende un conjunto X con la estructura de espacio topológico como en [13, 23]. Dados dos subconjuntos A y B de un espacio topológico X que cumplan $A \subset B$, denotamos la cerradura, interior, conjunto de puntos de acumulación y frontera de A, con respecto a B, por $cl_B(A)$, $int_B(A)$, A'_B y $fr_B(A)$. En el caso en que $B = X$, omitimos el subíndice. Asimismo, los conceptos continuidad de una función, compacidad, conexidad, metrizabilidad y sus respectivos resultados se apoyan de [13, 23, 24, 28]. Una separación de un espació X, se denota por $X = U|V$ donde U y V son conjuntos abiertos que separan a X.

El siguiente resultado nos da una caracterizacón sobre los puntos de acumulación en espacios métricos y se puede encontrar en [24].

1.1 Teorema. *Sea A subconjunto de un espacio métrico X. Entonces $x \in A'$, si y sólo si, para toda vecindad V de x, el conjunto $V \cap A$ es infinito.*

Un espacio X es *homogéneo* si para todo $x, y \in X$, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.

El siguiente resultado se puede probar mediante una prueba natural.

1.2 Teorema. *Si X es un espacio homogéneo y no discreto entonces $X = X'$.*

Recordemos que una familia $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ en un espacio X es localmente finita si todo punto de X tiene una vecindad V tal que $V \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para a lo más una cantidad finita de índices α.

El siguiente resultado es conocido como el Lema del Pegado, el cual nos menciona las condiciones que debe cumplir una familia de funciones continuas para que su unión siga siendo función continua. La demostración de este hecho lo podemos encontrar en [13].

1.3 Teorema. *Sean X, Y dos espacios topológicos y $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de conjuntos abiertos o una familia de conjuntos cerrados localmente finita en X tal que es cubierta de X. Si $f_\alpha : A_\alpha \to Y$ es continua para todo $\alpha \in \Lambda$ y $f_\alpha \restriction_{A_\alpha \cap A_\beta} = f_\beta \restriction_{A_\alpha \cap A_\beta}$ para todo $(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda$, entonces $f = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha : X \to Y$ es una función continua tal que $f \restriction_{A_\alpha} = f_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$.*

Un concepto que se utilizará bastante en esta tesis es el orden de un punto. A saber, este concepto es de los más importantes relacionados con la estructura de las curvas. Fueron W. H. Young y G. Ch. Young quienes dieron una definición usando continuos. Al momento de tratar de precisar el concepto, Z. Janiszewski usó a los continuos irreducibles (véase [15]). Sin embargo, hoy en día se usa la siguiente definición.

1.4 Definición. Sean X espacio topológico, $p \in X$ y β un número cardinal. Decimos que *p es de orden menor o igual a β en X*, denotado por $ord(p, X) \leq \beta$, si para todo abierto U tal que $p \in U$, existe V abierto tal que $p \in V \subset U$ y $|fr(V)| \leq \beta$. Decimos que *p es de orden β en X*, denotado por $ord(p, X) = \beta$, si $ord(p, X) \leq \beta$ y $ord(p, X) \not\leq \alpha$ para todo número cardinal $\alpha < \beta$.

Cuando no hay confusión sobre que espacio se está tomando el orden de p, lo denotaremos por $ord(p)$.

1.5 Ejemplo. Sea $X = [0, 1]$, notemos que 0 y 1 son puntos que tienen orden uno y cada punto en $X \setminus \{0, 1\}$ tiene orden dos.

Además, por la Definición 1.4 y propiedades de cerradura respecto a un subespacio, se puede argumentar el siguiente resultado.

1.6 Teorema. *Si X es un espacio topológico y A es un subespacio de X, entonces para todo $x \in A$ cumple que $ord(x, A) \leq ord(x, X)$.*

En general, los puntos de un espacio topológico que tengan orden uno se llaman *puntos extremos*, los de orden dos son *puntos ordinarios* y los de orden mayor o igual a tres se dice que son *puntos de ramificación*.

La estructura de conjuntos de orden finito fue estudiada por W. L. Ayres en 1931 y por P. S. Urysohn en 1927 [15]. Éste último construyó ejemplos de curvas constituidas solamente por puntos de orden ω.

1.7 Notación. Denotamos a los conjuntos de puntos que tienen ciertos ordenes dentro de un espacio topológico X como sigue:

1. $R[X] = \{x \in X : x \text{ es punto de ramifación}\}$.
2. $E[X] = \{x \in X : x \text{ es punto extremo}\}$.
3. $O[X] = \{x \in X : x \text{ es punto ordinario}\}$.
4. $R_\omega[X] = \{r \in R[X] : ord(r) = \omega\}$.

La siguiente definición fue dada en 1853 por G. Cantor, cuyo nombre se debe a que sus raíces están asociadas a la noción de continuidad (véase [15]). Dicho concepto engloba los conceptos fundamentales de este trabajo.

1.8 Definición. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Un continuo *no degenerado* es un continuo que tiene más de un punto. Un *arco* es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. El siguiente teorema es un resultado importante sobre la cardinalidad de los continuos y se encuentra en [23].

1.9 Teorema. *Sea X un continuo no degenerado entonces $|X| = \mathfrak{c}$.*

La siguiente observación se puede justificar mediante una prueba de manera natural.

1.10 Observación. Sean X, Y espacios topológicos y $h : X \to Y$ homeomorfismo. Si A es un arco en X entonces $h(A)$ es un arco en Y. Además, para todo $B \subset X$ se cumple que $|B| = |h(B)|$.

Utilizando la Definición 1.4, las propiedades de homeomorfismo y la Observación 1.10 se argumenta el siguiente resultado.

1.11 Teorema. *Sean X, Y espacios topológicos y $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Entonces para todo $x \in X$, $ord(h(x), Y) = ord(x, X)$.*

Recordemos que una *componente* de un espacio X, se define como un subconjunto conexo maximal de X.

El siguiente resultado se encuentra en [28].

1.12 Teorema. *Sean X continuo y E subconjunto propio no vacío de X. Si K es componente de E, entonces:*

1. *Si E es abierto en X entonces $cl(K) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$.*
2. *Si E es cerrado en X entonces $K \cap cl(X \setminus E) \neq \emptyset$.*

Un punto p en X es de *corte* si $X \setminus \{p\}$ es disconexo. Por otro lado, una *curva cerrada simple* es un espacio homeomorfo a S^1.

Ahora, sean A un arco y $h : [0,1] \to A$ homeomorfismo con $h(0) = p$ y $h(1) = q$. Notemos que los puntos p y q son puntos extremos del arco A. Un espacio topológico X es *arcoconexo* si para cualesquiera $p, q \in X$ distintos existe un arco con puntos extremos p y q. Además, si A es un arco en un espacio X con puntos extremos p y q, entonces A es *arco libre* si $A \setminus \{p, q\}$ es un conjunto abierto en X.

El siguiente teorema da una caracterización a los continuos sin puntos de ramificación. Mientras tanto, el segundo resultado caracteriza a los arcos en términos de sus puntos que no son de corte. Las pruebas se pueden hallar en [28].

1.13 Teorema. *Si X es un continuo no degenerado, entonces $ord(p, X) \leq 2$ para todo $p \in X$ si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

1.14 Teorema. *Un continuo X es un arco si y sólo si X tiene exactamente dos puntos que no son puntos de corte.*

En la demostración de la implicación del resultado anterior, Nadler da una construcción de un homeomorfismo $h : X \to [0,1]$ en el que para todo subconjunto denso numerable C de $X \setminus \{p, q\}$, donde p y q son puntos extremos de X, y el conjunto denso de racionales diádicos D en $(0,1)$ cumple que $h[C] = D$, $h(p) = 0$ y $h(q) = 1$. De esto hecho, se argumenta el siguiente resultado.

1.15 Teorema. *Si J_1 y J_2 son arcos con puntos extremos p_1, q_1 y p_2, q_2, respectivamente y si D_1 y D_2 son subconjuntos densos numerables de $J_1 \setminus \{p_1, q_1\}$ y $J_2 \setminus \{p_2, q_2\}$ entonces D_1 y D_2 son homeomorfos. Más aún, existe un homeomorfismo $h : J_1 \to J_2$ tal que $h(D_1) = D_2, h(p_1) = p_2$ y $h(q_1) = q_2$.*

Cabe destacar que indirectamente se está trabajando con el axioma de elección pues en la demostración del siguiente teorema se usa el principio maximal de Haussdorff. Este principio y la prueba de que es equivalente al axioma de elección se encuentra en [7]. En 1920, R. L. Moore demostró el siguiente teorema y su demostración se encuentra en [28].

1.16 Teorema. *Sean X continuo y c punto de corte de X, es decir,*

$$X \setminus \{c\} = U|V.$$

Entonces, existe un punto que no es de corte de X en U y existe un punto que no es de corte de X en V. Por tanto, X tiene al menos dos puntos que no son de corte.

Una *gráfica* es una unión de una familia finita de arcos tales que cualesquiera dos arcos en dicha familia son disjuntos o se intersectan sólo en uno o en ambos puntos extremos. Además, un *árbol* es una gráfica que no contiene curvas cerradas simples.

El siguiente resultado caracteriza a los árboles mediante la cantidad de puntos extremos. Su prueba se puede hallar en [28].

1.17 Teorema. *Un continuo X es un árbol si y sólo si X tiene una cantidad finita de puntos que no son de corte.*

1.2. Continuos de Peano

Uno de los conceptos básicos de topología es la conexidad. La definición actual de este concepto fue introducida en 1893 por C. Jordan para la clase de subconjuntos compactos del plano. El estudio de este concepto comenzó en 1914 por F. Hausdorff, y continuó en 1921 por B. Knaster y K. Kuratowski (véase [15]).

Un espacio topológico X es *localmente conexo*, si para todo punto $p \in X$ y toda vecindad de p, contiene un abierto conexo que tenga a p.

En 1890, G. Peano construyó una función continua y sobreyectiva que va del intervalo cerrado $[0, 1]$ al cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$. Gracias al teorema de Hahn-Mazurkiewicz, que caracteriza a los continuos localmente conexos como imagenes continuas del intervalo cerrado $[0, 1]$, hoy en día nos referimos a esos continuos como continuos de Peano (véase [12]). En esta sección se presentan resultados importantes sobre los continuos de Peano.

1.18 Definición. Un espacio métrico X es un *espacio de Peano* si es localmente conexo.

En 1913 S. Mazurkiewicz y en 1916 R. L. Moore demostraron el siguiente teorema importante acerca de los continuos de Peano, cuya demostración se encuentra en [28].

1.19 Teorema. *Todo continuo no degenerado de Peano es arcoconexo.*

Un espacio topológico X es *localmente arcoconexo* si para cada $p \in X$ toda vecindad de p contiene una vecindad arcoconexa de p.

Un hecho básico es que todo espacio métrico localmente arcoconexo es espacio de Peano. Los espacios localmente arcoconexos y de Peano han sido estudiados por B. Banaschewski, M. Henriksen, J. R. Isbell, S. A. Drozdovskiĭ, entre otros (véase [12]).

Los siguientes dos resultados son consecuencias del teorema anterior, sus pruebas se pueden hallar en [28].

1.20 Teorema. *Todo subconjunto abierto de un continuo de Peano es localmente arcoconexo. En particular, todo continuo de Peano es localmente arcoconexo.*

1.21 Teorema. *Todo subconjunto abierto conexo de un continuo de Peano es arcoconexo.*

Un espacio topológico X es *conexo en pequeño* si para todo punto p, toda vecindad de p contiene una vecindad conexa de p.

En 1920, Kuratowski caracterizó a los continuous de Peano como los continuos en los cuales las componentes de los conjuntos abiertos también son conjuntos abiertos (véase [15]). En 1961, John G. Hocking y Gail. S. Young enunciaron el concepto de conexo en pequeño y demostraron que un espacio conexo en pequeño implica que es un espacio de Peano. Su trabajo acerca de este concepto se puede encontrar en [14]. Actualmente se caracteriza a los espacios de Peano mediante el siguiente resultado que se encuentra en [28].

1.22 Teorema. *Sea X un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *X es un espacio de Peano.*
2. *Toda componente de cada subconjunto abierto de X es abierto en X.*
3. *X es conexo en pequeño.*

1.3. Dendritas

En [16], Janusz J. Charatonik reunió 62 caracterizaciones de dendritas que se han publicado en distintos artículos desde 1942. Sin embargo, para objetivos de este trabajo sólo se menciona 4 formas de caracterizarlas. Entre varios resultados acerca de las dendritas se encuentra la construcción de una dendrita que tiene una copia de cualquier dendrita, hecha por T. Wazewksi en 1923 (véase [28]). Además, Wazewski construyó para cada número natural $n \geq 3$ una dendrita que tiene una copia de cualquier dendrita para la clase de dendritas que tienen todos sus puntos de orden a lo más n (véase [15]).

1.23 Definición. Una dendrita X es un continuo de Peano que no contiene curvas cerradas simples.

En [11], H. M. Gehman construyó una dendrita cuyo conjunto de puntos extremos es homeomorfo al conjunto de Cantor en $[0,1]$ y todos sus puntos de ramificación son de orden 3, dando como resultado que el conjunto de puntos extremos en dendritas puede ser no numerable. Sin embargo, esto no sucede con el conjunto de puntos de ramificación de una dendrita tal y como se muestra en el siguiente teorema que se encuentra en [28].

1.24 Teorema. *Si X es una dendrita entonces, $R[X]$ es numerable.*

Otra propiedad que se cumple es que el orden de todo punto en una dendrita es a lo más numerable tal como menciona el siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en [28].

1.25 Teorema. *Si X es una dendrita, entonces para todo $x \in X$ cumple que $ord(x, X) \leq \omega$.*

En 1998, J. J. Charatonik y W. J. Charatonik demostraron que el conjunto de puntos ordinarios es denso en una dendrita. Este resultado es de gran importancia en los teoremas de la sección 2; su prueba se encuentra en [26].

1.26 Teorema. *Si X es una dendrita entonces $O[X]$ es denso en X.*

Una de las propiedades que cumplen las dendritas, tal y como se muestra en el siguiente resultado, es que el ser dendrita se hereda a los subcontinuos. La prueba de este hecho se encuentra en [28].

1.27 Teorema. *Todo subcontinuo de una dendrita es una dendrita.*

Dado un espacio topológico X y dos puntos distintos p y q en X, un punto z *separa* a p y q si $X \setminus \{z\} = U|V$ con $p \in U, q \in V$.

Sea X un espacio conexo y $p \in X$. Se define el *número de componentes de p en X*, denotado por $c(p, X)$, como la cardinalidad del conjunto de componentes de $X \setminus \{p\}$.

El siguiente resultado se debe a S. B. Nadler Jr., presenta 4 formas de caracterizar a las dendritas, se usará de manera recurrente a lo largo de todo el trabajo y la prueba se puede encontrar en [28].

1.28 Teorema. *Sea X un continuo no degenerado y $p \in X$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *X es una dendrita.*
2. *Cualesquiera dos puntos de X son separados en X por un tercer punto.*
3. *Todo punto de X es un punto de corte o un punto extremo de X.*
4. *$ord(p, X) = c(p, X)$ siempre que alguno de éstos sea finito.*
5. *La intersección de cualesquiera dos subconjuntos conexos de X es conexo.*

Se dice que un continuo X es *herditariamente localmente conexo*, o simplemente *hlc*, si todo subcontinuo de X es continuo de Peano. En particular un continuo hlc, es un continuo de Peano.

Recordemos que en un espacio topológico X, podemos definir la noción de convergencia mediante la siguiente definición.

1.29 Definición. Sea X un espacio topológico, y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos el *límite inferior* de A_n y el *límite superior* de A_n como sigue:

1. $lim\ inf\ A_n = \{x \in X$: para cada subconjunto abierto U que tiene a x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N\}$.
2. $lim\ sup\ A_n = \{x \in X$: para cada subconjunto abierto U que tiene a x existe un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in J\}$.

Para $S \subset X$, se dice que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a S y se denota por $lim A_n = S$, cuando $lim\ inf\ A_n = S = lim\ sup\ A_n$.

Debido a esta definición y al trabajo en hiperespacios [1], tenemos el siguiente teorema acerca del concepto de convergencia en espacios métricos compactos (véase [28]).

1.30 Teorema. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces toda sucesión de subcontinuos de X tiene una subsucesión que converge a un subcontinuo de X.*

Un subcontinuo A de un espacio métrico compacto X es un *continuo de convergencia* si existe una sucesión de subcontinuos disjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $A = \lim A_n$ y $A \cap A_n = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente resultado es conocido como el Teorema del Continuo de Convergencia, debido a que nos da condiciones para que un continuo contenga un continuo de convergencia. La demostración se puede encontrar en [28].

1.31 Teorema. *Sean X continuo y $N = \{x \in X : X$ no es conexo en pequeño en $x\}$. Si $p \in N$, entonces existe un continuo de convergencia K de X tal que $p \in K$ y $K \subset N$.*

Los siguientes resultados muestran que las dendritas son herditariamente localmente conexas y proporcionan una caracterización de esta propiedad en términos de los continuos de convergencia. Las demostraciones se pueden hallar en [28].

1.32 Teorema. *Toda dendrita es hlc.*

1.33 Teorema. *Un continuo X es hlc si y sólo si X no contiene un continuo de convergencia.*

1.4. Resultados auxiliares sobre dendritas

En esta sección, se presenta la relación entre dendritas, gráficas y árboles, siendo éstos últimos en los que se trabaja con más detalle. Igualmente, se presenta las contrucciones del continuo F_ω y el peine, objetos que ayudan a caracterizar a las dendritas que no son árboles. Además, a partir de aquí se empiezan a dar las pruebas de algunos resultados que son conocidos, pero cuya demostración no se encuentra tan fácilmente en la literatura.

El siguiente resultado es conocido como el Lema de Transgresión, el cual se utiliza para obtener una función continua mediante la preimagen de los singletons. Dicha preimagen se llama *fibra*. Sin embargo, la demostración no se encuentra fácilmente en la literatura por lo que se da una prueba de este resultado.

1.34 Teorema. *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f : X \to Y$ mapeo cociente y $g : X \to Z$ función continua. Si g es constante en cada fibra $f^{-1}(y)$ (es decir, $g \circ f^{-1}$ es valor único), entonces $g \circ f^{-1}$ es función continua.*

Demostración. Sea U conjunto abierto de Z, entonces $g^{-1}[U]$ es conjunto abierto de X. Afirmamos que $f^{-1}[f[g^{-1}[U]] = g^{-1}[U]$. En efecto, sea $x \in f^{-1}[f[g^{-1}[U]]$, entonces $f(x) \in f[g^{-1}[U]]$. Esto implica que existe $w \in g^{-1}[U]$ tal que $f(x) = f(w)$. Dado que g es constante en cada fibra se tiene que $g(x) = (g \circ f^{-1})(f(x)) = (g \circ f^{-1})(f(w)) = g(w)$. Se sigue que $g(x) = g(w) \in U$, por lo que $x \in g^{-1}[U]$.

Dado que $f^{-1}[f[g^{-1}[U]] = g^{-1}[U]$ es conjunto abierto de X y por ser f mapeo cociente, obtenemos que $f[g^{-1}[U]] = (g \circ f^{-1})^{-1}[U]$ es conjunto abierto de Y. Por lo tanto, $g \circ f^{-1}$ es continua. □

1.35 Teorema. *Sea X una dendrita. Sea T un continuo contenido en X y K componente de $X \setminus T$. Entonces $cl(K)$ es una dendrita y $cl(K) = K \cup \{y\}$ para algún $y \in T$. Más aún, $y \in E[cl(K)]$ y además $\emptyset \neq E[cl(K)] \setminus \{y\} \subset E[X]$.*

Demostración. $cl(K)$ es un subcontinuo de X entonces, por el Teorema 1.27, $cl(K)$ es dendrita. Por el Teorema 1.22, las componentes del conjunto abierto $X \setminus T$ son abiertas, entonces $cl(K) \subset K \cup T$. Por el Teorema de Golpes en la Frontera, Teorema 1.12 1, $cl(K) \cap T \neq \emptyset$. Supongamos que $cl(K) \supset K \cup \{x, y\}$, con $x, y \in T \setminus K$ distintos. Por el Teorema 1.28 2, existe $z \in X$ tal que $X \setminus \{z\} = A|B$ con $x \in A$, $y \in B$. Analicemos los siguientes dos casos:

- Si $z \in X \setminus T$, entonces $T \subset X \setminus \{z\} = A|B$. Por ser T continuo, $T \subset A$ o $T \subset B$. Entonces $y \in T \subset A$ o $x \in T \subset B$, lo cual es una contradicción.
- Si $z \in T$, entonces $K \subset X \setminus T \subset X \setminus \{z\} = A|B$. Por ser K conexo, $K \subset A$ o $K \subset B$. Entonces, $y \in cl_{X\setminus\{z\}}(K) \subset cl_{X\setminus\{z\}}(A) = A$ o $x \in cl_{X\setminus\{z\}}(K) \subset cl_{X\setminus\{z\}}(B) = B$, lo cual es una contradicción.

En cualquiera de los casos anteriores, llegamos a una contradicción. Por lo que, $cl(K) = K \cup \{y\}$ para algún $y \in T$.

Notemos que, $cl(K) \setminus \{y\} = K$, entonces $c(y, cl(K)) = 1$. Por ser $cl(K)$ dendrita, el Teorema 1.28 4, implica que $y \in E[cl(K)]$.

Sea $p \in cl(K) \setminus \{y\}$, por ser $cl(K)$ dendrita, p es punto extremo o punto de corte de $cl(K)$. Si p es punto de corte, por el Teorema 1.16, $cl(K)$ tiene al menos dos puntos que no son de corte; y por el Teorema 1.28 3, esos dos puntos son extremos. Si p es punto extremo, claramente, $\emptyset \neq E[cl(K)] \setminus \{y\}$.

Sea $p \in E[cl(K)] \setminus \{y\}$. Notemos que

$$X = T \cup (X \setminus T) = T \cup \bigcup \{cl(L) : L \text{ es componente de } X \setminus T\}.$$

De lo anterior y dado que toda componente L de $X \setminus T$ cumple $cl(L) \setminus \{p\}$ es conexo y $cl(L) \setminus \{p\} \cap T \neq \emptyset$, obtenemos

$$X \setminus \{p\} = T \cup \bigcup \{cl(L) \setminus \{p\} : L \text{ es componente de } X \setminus T\}$$

es conexo. Por tanto, $p \in E[X]$. □

Sea un espacio métrico X. Dado un conjunto A no vacío y acotado, se define el *diámetro de* A como $diam(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. Si A es un conjunto que no está acotado, entonces se dice que A carace de diámetro o que $diam(A) = \infty$.

1.36 Definición. Sea X un espacio métrico. Una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión nula* si

$$\lim_{n\to\infty} diam(A_n) = 0.$$

El siguiente resultado fue mencionado por G. Whyburn en 1942 como un corolario en [9]. Sin embargo, su demostración no se encuentra fácilmente en la literatura. A continuación, se da una demostración.

1.37 Teorema. *Si X es un continuo hlc, entonces toda sucesión de distintas componentes de un conjunto abierto de X forma una sucesión nula.*

Demostración. Sea U un conjunto abierto en X. Sea $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de distintas componentes de U. Por el Teorema 1.21 y el Teorema 1.22, los conjuntos K_n son abiertos y arcoconexos para todo $n \in \mathbb{N}$.

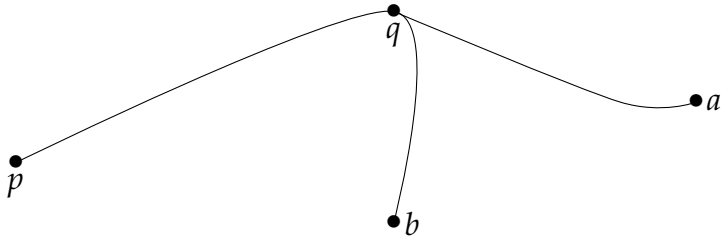
Supongamos por contradicción, que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $diam(K_n) \geq \epsilon$. Tomemos distintos $x_n, y_n \in K_n$ tales que $d(x_n, y_n) \geq \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces existen arcos A_n en K_n que conectan de x_n a y_n. Por el Teorema 1.30, sin pérdidad de generalidad, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un subcontinuo A.

Para llegar a una contradicción, por el Teorema 1.33, es suficiente probar que A es un continuo de convergencia. Si existe $z_n \in A_n \cap A$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces por ser K_n abierto que contiene a z_n y dado que $A = \lim\inf A_i$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq N$, $K_n \cap A_i \neq \emptyset$. Sea $m = max\{N, n\}$ y notemos que $K_n \cap A_{m+1} \neq \emptyset$ y por tanto $K_n \cap K_{m+1} \neq \emptyset$; lo cual es una contradicción. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A = \emptyset$. Es decir, A es un continuo de convergencia, obteniendo la contradicción deseada. Por tanto $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión nula. □

De los Teoremas 1.32 y 1.37 se obtiene el siguiente corolario.

1.38 Corolario. *Si X es una dendrita, entonces toda sucesión de distintas componentes de un conjunto abierto de X forma una sucesión nula.*

1.39 Lema. *Sea X una dendrita. Sea A un arco en X con puntos extremos p y a, y sea B un arco en X con puntos extremos p y b, donde $a \neq b$, a no pertenece al arco B y b no pertenece al arco A. Si q es el máximo punto que pertenece a $(A \cap B) \setminus \{p\}$ entonces q es punto de ramificación de X.*

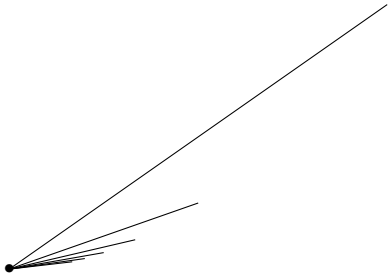


Demostración. Vamos analizar las componentes de $X \setminus \{q\}$. Supongamos que una componente K contiene a $\{p, a\}$, por el Teorema 1.21, existe un arco E en K con puntos extremos p y a. Entonces, $A \cap E$ no es conexo lo cual es una contradicción, por el Teorema 1.28 5. Entonces la componente que contiene a p es distinta a la componente que contiene al punto a.

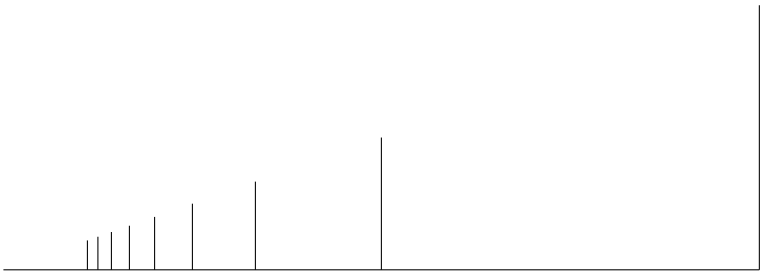
De manera análoga, se demuestra que las componentes no contienen ninguno de los conjuntos $\{p, b\}$ ni $\{a, b\}$, por lo tanto las componentes que contienen a algunos de los puntos a, p y b son distintas. Entonces $c(q, X) = 3$ y por el Teorema 1.28 4, q es punto de ramificación. □

A continuación, se muestra la construcción de dos dendritas que serán de gran importancia para poder caracterizar el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en el siguiente capítulo.

1.40 Ejemplo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n denota el segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ que conecta los puntos $(0,0)$ y $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$. El continuo $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denotado por F_ω.



1.41 Ejemplo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n denota el segmento en $\mathbb{R}^2$ que conecta los puntos $(\frac{1}{n}, 0)$ y $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Consideramos el continuo $P = ([0,1]\times\{0\}) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. Todo continuo homeomorfo a P es llamado *peine* (o *peine nulo*).



Nadler probó en [29] implícitamente el siguiente resultado.

1.42 Teorema. *Si X es un continuo de Peano que no es una gráfica, entonces X contiene una copia F_ω o un peine.*

El siguiente resultado da condiciones bajo las cuales una familia de árboles es finita, salvo homeomorfismos.

1.43 Teorema. *Fijemos $n_0 \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{F}$ una familia de árboles tal que cumple las siguientes condiciones para todo $T \in \mathcal{F}$:*

1. *Todo arco $A \subset T$ satisface $|A \cap R[T]| \leq n_0$.*
2. *$ord(x, T) \leq n_0$ para todo $x \in T$.*

Si los elementos de $\mathcal{F}$ no son homeomorfos por pares, entonces $\mathcal{F}$ es finito.

Demostración. Sea $T \in \mathcal{F}$ que contiene un punto de ramificación $x_0 \in T$. Definimos $X_{-1} = \emptyset$, $X_0 = \{x_0\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \{y \in R[T] \setminus X_{n-2} : \text{ existe un arco libre } A_{x,y} \text{ de un } x \in X_{n-1} \text{ a } y\}.$$

Ahora, notemos que $X_n = \emptyset$ para cada $n \geq n_0$, de lo contrario podemos formar un arco pegando n arcos mediante sus puntos extremos, con lo que se tendría un arco con $n+1$ puntos de ramificación, lo cual contradice la condición 1. Además, por la condición 2, $|X_n| \leq n_0^n$ para cada $n \leq n_0$. Por último, $R[T] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. De este análisis, podemos concluir que $|R[T]| \leq m$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

Ahora, un punto extremo y de T se puede unir mediante un arco libre a un único punto de ramificación. Pues, de poder conectarse a otro punto de ramificación mediante otro arco libre, $ord(y, T) = 2$, entonces y no sería punto extremo. Por la condición 2, no se pueden conectar más de n_0 puntos extremos a cada punto $x \in R[T]$. Por tanto, $|E[T]| \leq mn_0$. Entonces el conjunto de vértices del árbol T, denotado por $V(T)$, es acotado por algún $p = mn_0 + m \in \mathbb{N}$.

Sea K_p la gráfica completa de p vértices y sea $\mathcal{F}_p$ el conjunto de las subgráficas de K_p que son árboles. Notemos que todo árbol se puede encajar en K_p como un elemento de $\mathcal{F}_p$. Definamos una función $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_p$ donde $\phi(T)$ es la copia de T contenida en K_p antes mencionado. Además, si $\phi(T) = \phi(T')$ con $T, T' \in \mathcal{F}$ distintos, entonces $T \cong \phi(T) = \phi(T') \cong T'$ lo cual contradice la hipótesis. Entonces ϕ es inyectiva y por lo tanto $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_p| < \infty$. □

Un continuo X es *arcoconexo de forma única* si para cada par de puntos distintos $a, b \in X$, existe un único arco en X que tiene puntos extremos a y b. Este arco es denotado por ab.

1.44 Teorema. *Si X es una dendrita, entonces X es arcoconexo de forma única.*

Demostración. Sean $a, b \in X$ distintos, por ser X dendrita existe un arco A con puntos extremos a y b. Si existe un arco B distinto de A con puntos extremos a y b, entonces $A \cap B$ no es conexo, lo cual es una contradicción por el Teorema 1.28 5. Esto implica que el arco A es único. Por tanto, X es arcoconexo de forma única. □

1.45 Lema. *Sea X una dendrita. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es un árbol.*
2. *X es gráfica.*
3. *X es unión finita de arcos.*
4. *X tiene una cantidad finita de puntos extremos.*

Demostración. Por definición de gráfica y árbol, basta probar que 3 implica 4 y que 4 implica 1.

Supongamos que X es unión finita de arcos. Por el Teorema 1.14, cada arco tiene exactamente dos puntos que no son de corte. Dado que X es una dendrita y por el Teorema 1.28 3, solo esos puntos pueden ser puntos extremos de X. Efectivamente, para probar esta afirmación tomemos un arco A de los finitos uniendos de X. Sea $a \in A$ que es punto de corte de A. Si a es punto extremo de X entonces, por el Teorema 1.28 4, $X \setminus \{a\} = K$ con K conexo. Por el Teorema 1.28 5, $A \setminus \{a\} = K \cap A$ es conexo, así $c(a, A) = 1$ y por el Teorema 1.28 4, a es punto extremo de A, lo cual es una contradicción. Por lo que, los puntos de corte de los arcos de X siguen siendo puntos de corte de X. Por lo tanto, X tiene una cantidad finita de puntos extremos.

Luego, supongamos que X tiene una cantidad finita de puntos extremos, por el Teorema 1.28 3, éstos son exactamente los puntos que no son de corte y por el Teorema 1.17, X es un árbol. □

El resultado anterior muestra que en una dendrita el concepto de gráfica es equivalente al de árbol. Además, el teorema siguiente da condiciones para que una dendrita sea un árbol.

1.46 Teorema. *Si X es una dendrita tal que $R_\omega[X] = \emptyset$ y cada arco en X contiene una cantidad finita de puntos de $R[X]$ entonces X es un árbol.*

Demostración. Supongamos que X no es un árbol, por el Lema 1.45, X no es una gráfica. Por el Teorema 1.42, X contiene una copia de F_ω o un peine.

I) Si X contiene una copia F_ω, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la copia de F_ω es exactamente F_ω, tomando el punto $p = (0, 0)$ en $\mathbb{R}^2$ y dado que X es una dendrita cumple que $ord(p, X) = \omega$. Por tanto, $p \in R_\omega[X]$, lo cual es una contradicción.

II) Si X contiene un peine, sin pérdidad de generalidad, tomando el arco A que va de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ en $\mathbb{R}^2$, cumple que la sucesión de puntos $\{(\frac{1}{n+1}, 0)\}_{n\in\mathbb{N}}$, es una sucesión de puntos de ramificación en el arco. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomando el arco que va de $(0, 0)$ a $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$ y junto con el arco A, por el Teorema 1.39, el arco A contiene una cantidad infinita de puntos de $R[X]$, lo cual es una contradicción.

En cualquiera de los dos casos se llega a una contradicción. Por tanto, X es un árbol. □

1.47 Observación. Sea X una dendrita tal que $R_\omega[X]$ es finito y no vacío. El conjunto $\hat{T} := \bigcup\{ab : a, b \in R_\omega[X]\}$ es un árbol o un singletón, donde $aa = \{a\}$.

1.48 Teorema. *Sea X una dendrita tal que $R_\omega[X]$ es finito y no vacío. Si $h : X \to X$ es un homeomorfismo entonces $h[R_\omega] = R_\omega$, y por tanto $h[\hat{T}] = \hat{T}$, donde $\hat{T}$ es como en la observación 1.47.*

Demostración. Por Teorema 1.11, se obtiene que $h[R_\omega] = R_\omega$. Luego, usando que $h[R_\omega] = R_\omega$ y el Teorema 1.15 concluimos que,

$$h(\hat{T}) = \bigcup\{h(ab) : a, b \in R_\omega[X]\} = \bigcup\{h(a)h(b) : h(a), h(b) \in R_\omega\} = \hat{T}.$$

□

1.49 Corolario. *Sea X una dendrita tal que cada arco en X contiene una cantidad finita de puntos de $R[X]$. Si $R_\omega[X]$ es un conjunto finito no vacío y K es componente de $X \setminus \hat{T}$, donde $\hat{T}$ es como en la observación 1.47, entonces $cl(K)$ es un árbol.*

Demostración. Por el Teorema 1.35, $cl(K) = K \cup \{r\}$, donde $r \in \hat{T} \cap E[cl(K)]$. Entonces existe un arco ab con $a, b \in R_\omega[X]$ tal que $r \in ab$.

Afirmamos que $r \in R[X]$. En efecto, si r es punto extremo de ab terminamos. Si r no es punto extremo de ab, entonces $ab \setminus \{r\} = U|V$ donde $a \in U$ y $b \in V$. Luego, tomamos un arco A que va de un punto en K hacia r tal que $A \cap ab = \{r\}$, entonces $c(r, X) = 3$ y notemos que las componentes son U, V y A. Por el Teorema 1.28 4, $r \in R[X]$.

Afirmamos que $R_\omega[cl(K)] = \emptyset$. En efecto, si existe $x \in R_\omega[cl(K)]$ entonces por Teorema 1.6, $x \in R_\omega[X]$ así, $x \in \hat{T}$. Por Teorema 1.35, tenemos que $x = r \in E[cl(K)]$, lo cual es una contradicción.

Luego, si A es un arco contenido en $cl(K)$, entonces por el Teorema 1.6,

$$|A \cap R[cl(K)]| \leq |A \cap R[X]| < \omega.$$

Finalmente, por Teorema 1.46, concluimos que $cl(K)$ es un árbol. □

Capítulo 2

Grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables

En este capítulo se empieza a trabajar con la noción de espacio homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables definido en espacios topológicos separables. Este concepto que se remonta al trabajo de Cantor en [8]; posteriormente, Arhangel'skii, J. van Mill, Fitzpatrick, entre otros; siguieron publicando trabajos respecto a esa noción (véanse [2] y [6]).

La noción del grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables fue introducida por Kennedy en [17] y [18], donde mostró espacios que cumplen que su grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables es finito o numerable. Además, el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables también ha sido estudiado por R. Hernández-Gutiérrez en [25], y por M. Hrušák y J. van Mill en [21] donde generalizaron algunos resultados de [18].

Este capítulo se divide en dos secciones, la primera aborda un estudio general sobre el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables y la segunda se enfoca en el estudio de dicho concepto en árboles.

2.1. El grado de homogeneidad $d_{CDH}(X)$

Para un espacio topológico separable X, definimos al conjunto

$$\mathcal{D}_X = \{M \subset X : M \text{ es denso numerable }\}.$$

2.1 Definición. Sean X espacio topológico separable, $Y \subset X$ y $M, N \in \mathcal{D}_X$. Decimos que $M \sim N$ si existe un homeomorfimos $h : X \to X$ tal que $h[M] = N$. Si además, se satisface que $h \restriction_Y$ es la identidad, escribimos $M \sim_Y N$.

2.2 Observación. Para un espacio topológico separable X y $Y \subset X$, nótese que $\sim$ y $\sim_Y$ son relaciones de equivalencia en $\mathcal{D}_X$.

2.3 Definición. Un espacio topológico separable X es *homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables* si $M \sim N$ para todo $M, N \in \mathcal{D}_X$. Al conjunto de clases de equivalencias bajo la relación $\sim$, lo denotaremos por $\mathfrak{M}_X$.

La siguiente definición fue introducida por Kennedy en [17].

2.4 Definición. Sea X espacio topológico separable. *El grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables de* X es la cardinalidad del conjunto $\mathfrak{M}_X$, denotado por $d_{CDH}(X)$. Más aún, si $Y \subset X$ entonces la cardinalidad del conjunto de clases de equivalencias bajo la relación $\sim_Y$ es denotada por $d_{CDH}(X, Y)$.

2.5 Teorema. *Sea X espacio topológico separable y $Y \subset X$ entonces*

$$d_{CDH}(X) \leq d_{CDH}(X, Y).$$

Demostración. Definimos a $\phi : A \to B$ donde $A = \{[M]_Y : M \in \mathcal{D}_X\}$ y $B = \{[M] : M \in \mathcal{D}_X\}$ por $\phi([M]_Y) = [M]$. La función ϕ está bien definida, en efecto, sean $[M]_Y, [N]_Y \in A$ tales que $[M]_Y = [N]_Y$, entonces $M \sim_Y N$, esto implica $M \sim N$, entonces $\phi([M]_Y) = \phi([N]_Y)$.

Afirmamos que ϕ es sobreyectiva. En efecto, sea $[M] \in B$, entonces $[M]_Y \in A$ y cumple que $\phi([M]_Y) = [M]$. Con esto concluimos que $d_{CDH}(X) \leq d_{CDH}(X, Y)$. □

El siguiente resultado indica que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables de continuos no degenerados tiene una cota superior.

2.6 Teorema. *Si X es continuo no degenerado, entonces $d_{CDH}(X) \leq |X|$.*

Demostración. Afirmamos que $d_{CDH}(X) \leq |\{M \subset X : M \text{ es numerable}\}|$. En efecto, sean $A = \{M \subset X : M \text{ es numerable}\}$ y $B = \{[M] \subset X : M \text{ es numerable}\}$. Definimos una función $\phi : A \to B$ definida por $\phi(M) = [M]$. Notemos que esta función es sobreyectiva por lo que, $d_{CDH}(X) \leq |A|$. Ahora, $|A| \leq |X^\omega| = \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$. Por el Teorema 1.9, concluimos que $d_{CDH}(X) \leq |X|$. □

2.2. El grado de homogeneidad en árboles

Esta sección se enfoca en el estudio del grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en árboles. Además, al final de esta sección se muestran las condiciones para las cuales el grado de homogeneidad de un espacio Hausdorff es mayor o igual al continuo.

2.7 Notación. Para un árbol X y un subconjunto finito F de X, $Y[F]$ denotará el conjunto $E[X] \cup R[X] \cup F$.

2.8 Teorema. *Sea X un árbol y sea F un subconjunto finito de X. Si M y N pertenecen a $\mathcal{D}_{O[X]\setminus F}$ entonces $N \sim_{Y[F]} M$.*

Demostración. Denotemos por $\mathcal{A}$ el conjunto de arcos libres A en X los cuales son maximales con respecto a la propiedad $A \cap F \subset E[A]$. Dado que X es un árbol entonces $X = \bigcup \mathcal{A}$. Además, $\mathcal{A}$ es localmente finita en el árbol X.

Sean $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \neq B$. Afirmamos que $A \cap B \subset E[A] \cap E[B] \subset R[X] \cup F$. Primero, si $x \in A \cap B$, como A y B son arcos libres maximales distintos en X, entonces x es un punto extremo de A y B pues de lo contrario, $C = A \cup B$ es arco libre tal que A y B están contenidos en C lo cual es una contradicción por la maximalidad, así $A \cap B \subset E[A] \cap E[B]$. Luego, si $z \in E[A] \cap E[B]$ y no es punto de ramificación de X ni está en F, entonces $C = A \cup B$ es arco libre tal que A y B están contenidos en C lo cual es una contradicción por la maximalidad. Por tanto, $E[A] \cap E[B] \subset R[X] \cup F$.

Sea $A \in \mathcal{A}$, por el Teorema 1.15, existe un homeomorfismo $h_A : A \to A$ tal que $h_A[N \cap A] = M \cap A$ tal que $h_A \restriction_{E[A]}$ es la identidad. Definimos $h : X \to X$ por $h(x) = h_A(x)$ si $x \in A$, por el Teorema 1.3, h es un homeomorfismo y observamos que

$$h[N] = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} h_A[N \cap A] = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} M \cap A = M.$$

Además, si $x \in Y[F]$, por la maximalidad de los arcos libres, existe un arco $A \in \mathcal{A}$ tal que x es punto extremo de A y el otro punto extremo que es de ramificación de X, extremo de X o está en F. En particular, $x \in E[A]$ y $h(x) = h_A(x) = x$. Por tanto, $h \restriction_{Y[F]}$ es la identidad. □

El Teorema 2.6 nos muestra que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables de un continuo no degenerado está acotado superiormente por $\mathfrak{c}$. El siguiente resultado mejora la cota del grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables para el caso en el que el continuo es un árbol.

2.9 Corolario. *Sean X un árbol y F subconjunto finito de X. Fijemos un $L \in \mathcal{D}_{O[X]\setminus F}$ y sea $\mathcal{M}_0 = \{L \cup B : B \subset Y[F]\}$. Si $N \in \mathcal{D}_X$, entonces existe $M \in \mathcal{M}_0$ tal que $N \sim_{Y[F]} M$. En particular, $d_{CDH}(X) \leq d_{CDH}(X, Y[F]) \leq |\mathcal{P}(Y[F])|$.*

Demostración. Notemos que $N \cap (O[X] \setminus F) \in \mathcal{D}_{O[X]\setminus F}$. Ahora, por el Teorema 2.8, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h[N \cap (O[X] \setminus F)] = L$ y $h \restriction_{Y[F]}$ es la identidad. Sea $B = N \cap Y[F]$, entonces tomando $M = L \cup B \in \mathcal{M}_0$ se cumple que

$$\begin{aligned} h[N] &= h[N \cap X] = h[N \cap (Y[F] \cup (O[x] \setminus F))] \\ &= h[N \cap Y[F]] \cup h[N \cap (O[X] \setminus F)] \\ &= (N \cap Y[F]) \cup L = B \cup L = M. \end{aligned}$$

Por tanto, $N \sim_{Y[F]} M$. Ahora, todo elemento en $\mathcal{M}_0$ es un conjunto denso numerable, porque L es un conjunto denso numerable y todo $B \subset Y[F]$ es un conjunto numerable, pues $Y[F]$ es numerable, entonces $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{D}_X$. Además, notemos que $|\mathcal{M}_0| = |\mathcal{P}(Y[F])|$.

Basta probar que $d_{CDH}(X, Y[F]) \leq |\mathcal{M}_0|$. En efecto, definimos $\phi : A \to \mathcal{M}_0$, donde $A = \{[N]_{Y[F]} : N \in \mathcal{D}_X\}$, por $\phi([N]_{Y[F]}) = M$ donde $M \in \mathcal{M}_0$ y $N \sim_{Y[F]} M$. Si $[N]_{Y[F]}$ y $[N']_{Y[F]}$ están en A tales que $\phi([N]_{Y[F]}) = \phi([N']_{Y[F]})$, entonces

$$N \sim_{Y[F]} M \sim_{Y[F]} M' \sim_{Y[F]} N'.$$

Donde M y M' están relacionados mediante el homeomorfismo identidad, entonces $[N]_{Y[F]} = [N']_{Y[F]}$, así ϕ es inyectiva. Se sigue que $d_{CDH}(X, Y[F]) \leq |\mathcal{M}_0|$.

Por tanto, $d_{CDH}(X, Y[F]) \leq |\mathcal{P}(Y[F])|$ y por el Teorema 2.5 concluimos que, $d_{CDH}(X) \leq d_{CDH}(X, Y[F]) \leq |\mathcal{P}(Y[F])|$. □

El siguiente resultado muestra que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en un arco es tres. Más aún, nos da un ejemplo en el cual la relación del Teorema 2.5 es estricta.

2.10 Teorema. *Si X es un arco con puntos extremos a y b, entonces $d_{CDH}(X) = 3$. Más aún, si Y es un subarco propio de X entonces $d_{CDH}(X, Y) = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Fijemos $D \in \mathcal{D}_{O[X]}$ y sea $N \in \mathcal{D}_X$. Por el Corolario 2.9, $N \sim M$ para algún $M \in \{D, D \cup \{a\}, D \cup \{b\}, D \cup \{a, b\}\}$.

Por el Teorema 1.15, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(D) = D, h(a) = b$ y $h(b) = a$, por lo que, $D \cup \{a\} \sim D \cup \{b\}$. Además, observemos que $\{D, D \cup \{a\}, D \cup \{a, b\}\}$ no son equivalentes por pares puesto que, los homeomorfismos mandan puntos de corte en puntos de corte y respetan el número de puntos que no son de corte. Por tanto, $d_{CDH}(X) = 3$.

Por otro lado, probemos que $d_{CDH}(X, Y) = \mathfrak{c}$. Fijemos $D \in \mathcal{D}_{O[X]}$ y para todo $z \in Y \setminus D$ definimos $D_z = D \cup \{z\}$, entonces $D_z \in \mathcal{D}_X$. Si $z, w \in Y \setminus D$ son distintos y $h : X \to X$ es un homeomorfismo tal que $h[D_z] = D_w$ entonces $h(z) \neq z$, pues z no pertenece a D_w. Esto prueba que $D_z \nsim_Y D_w$, entonces $d_{CDH}(X, Y) = \mathfrak{c}$. □

El siguiente resultado nos da las condiciones para que la cardinalidad del conjunto de clases de equivalencias bajo la relación $\sim_Y$ de una unión finita de continuos sea a lo más numerable.

2.11 Teorema. *Sean X un continuo y $Y_0 \subset X$ un árbol o un singletón. Sea $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que $Y_1, \ldots, Y_k$ son subcontinuous no degenerados de X tales que para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ las siguientes condiciones se cumplen:*

1. *$Y_i \cap Y_0 = \{y_i\}$.*
2. *$Y_i \cap Y_j \subset Y_0$, para todo $i \neq j$.*
3. *$d_{CDH}(Y_i, \{y_i\}) \leq \omega$.*

Si $Y = \bigcup_{i=0}^{k} Y_i$ entonces $d_{CDH}(Y, \{y_1, \ldots, y_k\}) \leq \omega$.

Demostración. Dado que Y_0 es un árbol y tomando $F = \{y_1, \dots, y_k\}$, por el Corolario 2.9, fijamos una familia numerable $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{D}_{Y_0}$ tal que para todo $N \in \mathcal{D}_{Y_0}$, existen $M \in \mathcal{M}_0$ y $h : Y_0 \to Y_0$ homeomorfismo tal que $h[N] = M$ y $h \restriction_{\{y_1,\dots,y_k\}}$ es identidad.

También, por la condición 3, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ tenemos una familia numerable $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{D}_{Y_i}$ tal que para todo $N \in \mathcal{D}_{Y_i}$, existen $M \in \mathcal{M}_i$ y $h_i : Y_i \to Y_i$ homeomorfismo tal que $h_i[N] = M$ y $h_i(y_i) = y_i$.

Definimos $\mathcal{D} = \{\bigcup_{i=0}^{k} M_i : M_i \in \mathcal{M}_i, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, k\}\}$. Notemos que $\mathcal{D}$ es numerable y $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_Y$.

Fijemos $N \in \mathcal{D}_Y$ y para todo $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ sabemos que $Y_i \setminus \{y_1, \dots, y_k\}$ es un conjunto abierto no vacío de Y, por tanto $N \cap Y_i \in \mathcal{D}_{Y_i}$. Si $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces existen $M_i \in \mathcal{M}_i$ y $h_i : Y_i \to Y_i$ homeomorfismos tales que $h_i[N \cap Y_i] = M_i$ y $h_i(y_i) = y_i$. También, podemos tomar $M_0 \in \mathcal{M}_0$ y $h_0 : Y_0 \to Y_0$ homeomorfismo tal que $h_0[N \cap Y_0] = M_0$ y $h_0 \restriction_{\{y_1,\dots,y_k\}}$ es la identidad.

Luego, definimos $h : Y \to Y$ por $h(y) = h_i(y)$ si $y \in Y_i$. Por el Teorema 1.3, h es un homeomorfismo y

$$h[N] = h[N \cap Y] = \bigcup_{i=0}^{k} h[N \cap Y_i] = \bigcup_{i=0}^{k} M_i.$$

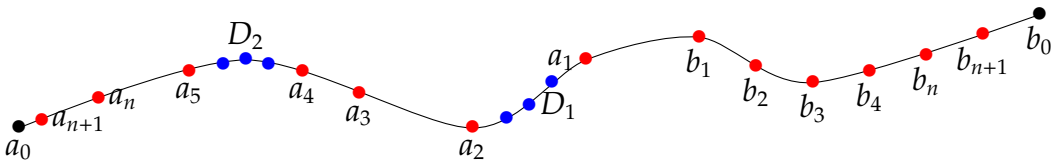
Entonces, como $\mathcal{D}$ es numerable, concluimos que $d_{CDH}(Y, \{y_1, \dots, y_k\}) \leq \omega$. □

Los resultados anteriores muestran que la cardinalidad del conjunto de clases de equivalencias bajo la relación $\sim_Y$ de un espacio es a lo más el continuo. Sin embargo, el siguiente resultado nos da condiciones para que el grado de homogeneidad de un espacio Hausdorff X sea mayor o igual al continuo, y por el Teorema 2.5 se sigue que para todo $Y \subset X$ satisface que $d_{CDH}(X, Y) \geq \mathfrak{c}$.

2.12 Teorema. *Sea X un espacio Hausdorff. Supongamos que $L \subset X$ es un arco con $int(L) = \emptyset$ y con puntos extremos a_0 y b_0. Supongamos que E es un subconjunto denso numerable de $X \setminus L$. Sea $\leq_L$ un orden total en L cuyo punto mínimo es a_0. Fijemos sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en L cuyos límites son a_0 y b_0, respectivamente y que satisfacen para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$a_{n+1} <_L a_n \leq_L a_1 <_L b_1 \leq_L b_n <_L b_{n+1}.$$

Más aún, para todo $n \in \mathbb{N}$, sea D_n un subconjunto denso numerable del subarco $a_{3n-1}a_{3n-2}$ de L.



Para cada $K \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, definimos

$$M_K = E \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n) \cup \{b_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{a_{3n} : n \in K\} \cup \{a_0\}.$$

Supongamos que para todo $K, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y cada homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h[M_K] = M_Q$ satisface que $h[L] = L$. Entonces $d_{CDH}(X) \geq \mathfrak{c}$.

Demostración. Fijemos $K, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Si U es un abierto no vacío de X entonces, como el interior de L es vacío, $U \setminus L$ es abierto no vacío de $X \setminus L$, así $(U \setminus L) \cap E \neq \emptyset$, por lo que $U \cap E \neq \emptyset$. Entonces $M_K, M_Q \in \mathcal{D}_X$.

Sea $h : X \to X$ un homeomorfismo tal que $h[M_K] = M_Q$. Para probar que $d_{CDH}(X) \geq \mathfrak{c}$ es suficiente demostrar que $K = Q$, puesto que esto induce una función inyectiva $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{[M] : M \subset X \text{ denso numerable}\}$ definida por $\phi(K) = [M_K]$.

Por hipótesis tenemos que $h[M_K \cap L] = M_Q \cap L$. Esto implica que si C es una componente no degenerada de $cl(M_K \cap L)$, entonces $h(C)$ es una componente no degenerada de $cl(M_Q \cap L)$. Así, $h[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Notemos que

1. $a_0 \in cl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n)$.

En efecto, sea U abierto tal que $a_0 \in U$. Por ser a_0 punto límite de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $a \in L$ con $a_0 \leq_L a \leq_L a_N$ se cumple que $a \in U$. Entonces existe un subarco $a_{3m-1}a_{3m-2}$ para algún $m \in \mathbb{N}$ con $3m - 2 \geq N$ tal que $U \cap D_m \neq \emptyset$, esto implica que $U \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n) \neq \emptyset$, entonces $a_0 \in cl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n)$.

2. b_0 no pertenece a $cl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n)$.

En efecto, pues tomando el subarco b_1b_0 es una vecindad de b_0 en L tal que $b_1b_0 \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n) = \emptyset$.

Las condiciones 1 y 2 junto con $h[L] = L$ implican que $h(b_0) = b_0$. Con esto tenemos que h preserva el orden. Ahora, sea $x \in cl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n)$ tal que

(i) x pertenece a una componente no degenerada $cl(D_j)$ de $cl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n)$ para algún $j \in \mathbb{N}$.

(ii) $cl(D_j)$ está contenida en el subarco xb_0 de L.

(iii) xb_0 contiene exactamente j componentes no degeneradas de $cl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n)$.

Observemos que a_{3j-1} es el único punto en $cl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n)$ que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii). La condición (iii) junto con $h[L] = L$ y $h(b_0) = b_0$ implican que $h(a_{3j-1}) = a_{3j-1}$. Se sigue que para todo $j \in \mathbb{N}$, $h[cl(D_j)] = cl(D_j)$ y $h(a_{3j-2}) = a_{3j-2}$. En particular, el subarco $a_{3n+1}a_{3n-1}$ de L es invariante bajo h, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, probemos que $K \subseteq Q$. En efecto, si $k \in K$ entonces a_{3k} pertenece a $M_K \cap a_{3k+1}a_{3k-1}$ entonces, $h(a_{3k}) \in h(M_K \cap a_{3k+1}a_{3k-1}) = M_Q \cap a_{3k+1}a_{3k-1}$. Dado que $a_{3k+1} \neq a_{3k} \neq a_{3k-1}$ implica que $h(a_{3k}) = a_{3k} \in M_Q$, así $k \in Q$. Mediante un argumento similar, se prueba que $Q \subseteq K$. Por lo tanto, $K = Q$ y mediante la función inducida mencionada anteriormente, concluimos la prueba. □

Capítulo 3

Caracterización de $d_{CDH}(X)$ en dendritas

En el presente capítulo se calcula el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en dendritas. Gracias al Corolario 2.9, es natural probar el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en árboles es finito. Sin embargo, el recíproco no es tan evidente y nos apoyamos del Teorema 1.42 (véase Corolario 3.12).

Una vez que se caracteriza que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables es finito, mediante el apoyo del Corolario 1.49, bastará caracterizar en dendritas que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables es el continuo mediante las siguientes condiciones:

1. Contiene un arco con una cantidad infinita de puntos de ramificación (véase Teorema 3.3).
2. Contiene una cantidad infinita de puntos de orden ω. (véase Teorema 3.5).
3. Contiene una cantidad infinita de arcos cuya cantidad de puntos de ramificación es distinta (véase Teorema 3.6)
4. Contiene una cantidad infinita de puntos de orden finito o ω (véase Teorema 3.8).

Finalmente, se determina que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en dendritas es finito, ω o $\mathfrak{c}$ (véase Corolario 3.12). Primero, demostramos que si el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en una dendrita es finito si y sólo si la dendrita es un árbol.

3.1 Teorema. *Sea X una dendrita. Entonces $d_{CDH}(X) < \omega$ si y sólo si X es un árbol.*

Demostración. Si X es un árbol, entonces X es unión finita de arcos por lo que tiene una cantidad finita de puntos de ramificación. Además, por el Lema 1.45, X tiene una cantidad finita de puntos extremos. Se sigue que por el Corolario 2.9, $d_{CDH}(X) \leq |\mathcal{P}(Y[F])| < \omega$, donde $F \subset X$ finito.

Ahora, procediendo de manera contrarrecíproca, supongamos que X no es un árbol. Por el Lema 1.45 y el Teorema 1.42, X contiene una copia de F_ω o un peine. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que X contiene una copia de F_ω y que la copia de F_ω es exactamente F_ω. Probemos la siguiente afirmación:

1. Para cada punto extremo de F_ω que no es extremo de X, se le puede asignar un punto extremo de X de manera que tal asignación es inyectiva.

En efecto, sea $z \in E[F_\omega] \setminus E[X]$. Sea K componente de $X \setminus \{z\}$ tal que $K \cap F_\omega = \emptyset$. Por el Teorema 1.35, $cl(K) = K \cup \{z\}$ y $\emptyset \neq E[cl(K)] \setminus \{z\} \subset E[X]$. Fijemos $z' \in E[cl(K)] \setminus \{z\}$. Observemos que la asignación $z \mapsto z'$ es inyectiva.

De 1 y que la cardinalidad de $E[F_\omega]$ es infinito, concluimos que la cardinalidad de $E[X]$ es infinito. Ahora, tomemos una sucesión de puntos $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E[X]$. Fijemos $M \in \mathcal{D}_{O[X]}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $M_n = M \cup \{e_i : 1 \leq i \leq n\}$, entonces $M_n \in \mathcal{D}_X$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún, si $n, k \in \mathbb{N}$ satisfacen que existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h[M_n] = M_k$ entonces se cumple que $h[\{e_i : 1 \leq i \leq n\}] = \{e_i : 1 \leq i \leq k\}$, pues para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, e_i no pertenece a M. Por lo tanto, $n = k$. Se sigue que la funcion $\phi : \mathbb{N} \to \mathfrak{M}_X$ definida por $\phi(n) = [M_n]$ es inyectiva. Por lo tanto, $d_{CDH}(X) \geq \omega$. □

Como consecuencia del teorema anterior, se enfocará a dar las condiciones necesarias y suficientes para que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en dendritas sea el continuo. Primero, daremos una condición para que una dendrita contenga un arco con una cantidad infinita de puntos de ramificación.

3.2 Lema. *Sean X dendrita, $q \in X$ y K componente de $X \setminus \{q\}$. Si $q \in cl_{cl(K)}(K \cap R[X])$, entonces existe un arco $A \subset cl(K)$ tal que $A \cap R[X]$ es infinito.*

Demostración. Por el Teorema 1.35, $cl(K) = K \cup \{q\}$ es una dendrita y $q \in E[cl(K)]$. Fijemos $r_0 \in K \cap R[X]$, por el Teorema 1.19, sea r_0q arco en $cl(K)$.

Ahora, por el Teorema 1.20, sea V_1 una vecindad arcoconexa de q en $cl(K)$ tal que r_0 no pertenece a V_1; tomemos $s_1 \in V_1 \cap R[X] \setminus \{q\}$. Afirmamos que existe $r_1 \in r_0q \setminus \{r_0, q\}$ tal que $r_1 \in R[X]$ y $s_1r_1 \cap r_0q = \{r_1\}$. En efecto, si $s_1 \in r_0q$ entonces tomamos $r_1 = s_1 \in R[X]$ y si s_1 no pertenece a el arco r_0q entonces, por la arcoconexidad de V_1, existe el arco s_1r_1 en V_1, para algún $r_1 \in r_0q$, tal que $s_1r_1 \cap r_0q = \{r_1\}$. Supongamos que $r_1 = q$, entonces X contiene dos arcos distintos con puntos extremos s_1 y r_0, el primero de ellos es $s_1q \cup qr_0$, y el segundo de ellos es el arco s_1r_0 contenido en $K \setminus \{q\}$, el cual existe por el Teorema 1.19, cuya intersección no es conexa, lo

cual contradice el Teorema 1.28. Por tanto, $r_1 \in r_0q \setminus \{r_0, q\}$ y, por el Teorema 1.39, $r_1 \in R[X]$.

Recursivamente, supongamos que existe n puntos distintos $r_1, r_2, \ldots, r_n$ que pertenecen a $r_0q \cap R[X] \setminus \{q\}$. Sea V_{n+1} una vecindad arcoconexa en $cl(K)$ de q tal que $\{r_0, r_1, \ldots, r_n\} \cap V_{n+1} = \emptyset$. Sea $s_{n+1} \in V_{n+1} \cap R[X] \setminus \{q\}$. Afirmamos que existe $r_{n+1} \in r_0q \setminus \{r_0, r_1, \ldots, r_n, q\}$ tal que $r_{n+1} \in R[X]$ y $s_{n+1}r_{n+1} \cap r_0q = \{r_{n+1}\}$. En efecto, si $s_{n+1} \in r_0q$, tomemos $r_{n+1} = s_{n+1} \in R[X]$ y, si s_{n+1} no pertenece al arco r_0q, por la arcoconexidad de V_{n+1}, existe el arco $s_{n+1}r_{n+1}$ en V_{n+1} tal que $s_{n+1}r_{n+1} \cap r_0q = \{r_{n+1}\}$, para algún $r_{n+1} \in r_0q$. Supongamos que $r_{n+1} = q$, entonces X contiene dos arcos distintos con puntos extremos s_{n+1} y r_0, el primero de ellos es $s_{n+1}q \cup r_0q$, y el segundo de ellos es el arco $s_{n+1}r_0$ contenido en $K \setminus \{q\}$, el cual existe por el Teorema 1.19, cuya intersección no es conexa, lo cual contradice el Teorema 1.28. Por tanto, $r_{n+1} \in r_0q \setminus \{r_0, q\}$ y para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple que $r_{n+1} \neq r_i$. Además, por el Teorema 1.39, se satisface que $r_{n+1} \in R[X]$. De esta forma, concluimos que $r_0q \cap R[X]$ es infinito. □

Ahora que hemos determinado condiciones para la existencia de un arco en una dendrita con una cantidad infinita de puntos de ramificación mostraremos cómo la existencia de estos arcos determina que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables de la dendrita es el continuo.

3.3 Teorema. *Sea X una dendrita. Si existe un arco A contenido en X tal que $R[X] \cap A$ es infinito entonces $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Sea $\leq_A$ orden total en A. Tomemos un punto de acumulación p de $R[X] \cap A$. Invirtiendo el orden si es necesario, podemos suponer que existe una sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset R[X] \cap A$ tal que $r_n <_A r_{n+1} <_A p$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $r_n \to p$. Sea $S = \{r_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{p\}$. Probemos la siguiente afirmación.

1. Si $h : X \to X$ es un homeomorfismo tal que $h[S] = S$, entonces $h \restriction_S$ es la identidad.

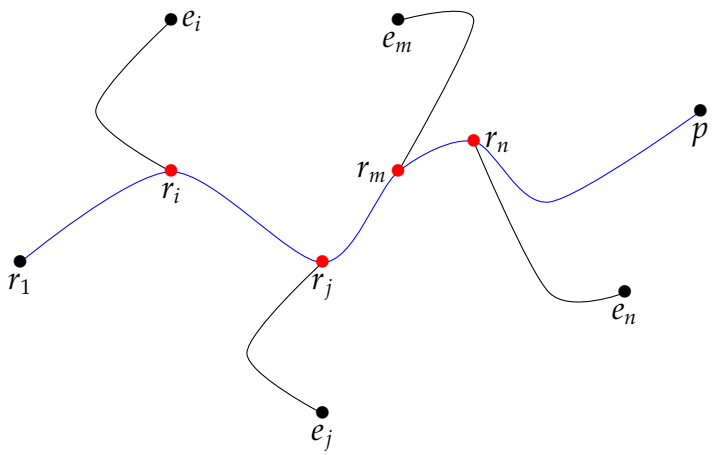
Como p es el único punto no aislado de S, entonces $h(p) = p$. Como r_1p es un arco que contiene a S y $E[r_1p] \subset S$, esto implica que $h(r_1p)$ es un arco que contiene a S y $E[h(r_1p)] \subset S$. Entonces $E[h(r_1p)] = \{h(r_1), p\}$ y como h preserva puntos extremos, $h(r_1) = r_1$ y por el Teorema 1.44, obtenemos que $h[r_1p] = r_1p$.

Dado que $h \restriction_{r_1p}$: $r_1p \to r_1p$ es un homeomorfismo creciente y $h[S] = S$ entonces $h \restriction_S$ es la identidad. En efecto, procediendo por inducción, sabemos que $h(r_1) = r_1$. Supongamos que tenemos $h[r_i] = r_i$ para todo $i \leq n$. Si $h[r_{n+1}] = r_m$ con $m \geq n + 2$, dado que $h[S] = S$, existe un $r_k \in S$, para algún $k \geq n + 2$, tal que $h[r_k] = r_{n+1}$. Como $r_{n+1} <_A r_k$, al aplicar el homeomorfismo h, que preserva orden, obtenemos que $r_m <_A r_{n+1}$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $h \restriction_S$ es la identidad.

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, dado que $r_n \in R[X]$, existe un arco $L_n \subset X$ tal que $L_n \cap A = \{r_n\}$ y $r_n \in E[L_n]$. Sea K_n una componente de $X \setminus \{r_n\}$ que contiene a $L_n \setminus \{r_n\}$. Por el Teorema 1.35, $cl(K_n) = K_n \cup \{r_n\}$ es una dendrita. Así, fijemos $e_n \in E[cl(K_n)] \setminus \{r_n\} \subset E[X]$ y observemos que

2. $e_n r_n \cap r_1 p = \{r_n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Si $j \neq n$, entonces $\{r_j, r_n\} \subset e_j r_n$.



Fijemos $M \in \mathcal{D}_{O[X]}$ y para todo $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sea $M_B = M \cup S \cup \{e_n : n \in B\}$. Entonces $M_B \in \mathcal{D}_X$. Supongamos que $B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tales que existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h[M_B] = M_C$. Probemos que $B = C$.

Sea $n \in B$, notemos que $h[S] = h[cl(M_B \cap R[X])] = cl(h[M_B \cap R[X]]) = cl(M_C \cap R[X]) = S$. Por 1, $h \restriction_S$ es la identidad. Como $e_n \in M_B \cap E[X]$ tenemos que $h(e_n)$ pertenece a $(M_C \setminus \{p\}) \cap E[X]$. Por tanto, $h(e_n) = e_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Por 1 y 2 deducimos que $e_j r_n \cap r_1 p = h[e_n r_n \cap r_1 p] = \{r_n\}$. Si $j \neq n$, por 3, $\{r_j, r_n\} \cap r_1 p \subset e_j r_n \cap r_1 p = \{r_n\}$, entonces $r_j = r_n$, lo cual es una contradicción por lo tanto, $j = n$ y $h(e_n) = e_n \in M_C$. Entonces, $n \in C$. Similarmente, se prueba que $C \subset B$, por lo tanto $B = C$.

Definimos una función inyectiva $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{M}_X$ por $\phi(B) = [M_B]$. Así, por los Teoremas 1.9 y 2.6, obtenemos que $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$. □

3.4 Lema. *Sean X dendrita, $q \in X$ y K componente $X \setminus \{q\}$. Si existe $r \in K \cap R_\omega[X]$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $E_n \subset E[cl(K)] \setminus \{q\} \subset E[X]$ tal que $|E_n| = n$.*

Demostración. Observemos que $c(r, X) = \omega$, de lo contrario por el Teorema 1.28 4, $ord(r, X) < \omega$ lo cual es una contradicción. Luego, sea L la componente conexa de $X \setminus \{r\}$ que contiene a q y a $X \setminus K$. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $L_1, \ldots, L_n$ componentes conexas de $X \setminus \{r\}$ distintas de L. Observemos que $L_1, \ldots L_n$ son componentes conexas de $cl(K) \setminus \{r\}$. Por el Teorema 1.35, existen $e_i \in E[cl(L_i)] \setminus \{r\}$ para todo $i \leq n$. Entonces $e_i \in E[cl(K)] \setminus \{q\} \subset E[X]$ para todo $i \leq n$. Tomamos $E_n = \{e_i : 1 \leq i \leq n\}$. □

Ahora, en el siguiente resultado probamos que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en una dendrita es el continuo si existe una cantidad infinita de puntos de orden ω.

3.5 Teorema. *Si X es una dendrita tal que $R_\omega[X]$ es infinito, entonces $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Sea q un punto de acumulación de $R_\omega[X]$ y una sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que pertenezca a $R_\omega[X] \setminus \{q\}$ y que converja a q. Sea $S = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si existe K una componente de $X \setminus \{q\}$ tal que $K \cap S$ es infinito, por el Lema 3.2, existe un arco A en $cl(K)$ tal que $A \cap R[X]$ es infinito y por el Teorema 3.3, $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$.

Por tanto, supongamos que cada componente de $X \setminus \{q\}$ contiene una cantidad finita de puntos de S. Si $ord(q, X) < \omega$, por el Teorema 1.28, $c(q, X) < \omega$ es decir, existe una cantidad finita de componentes $K_1, \ldots, K_n$ de $X \setminus \{q\}$ tales que contienen una cantidad finita de puntos de S, entonces S es finito lo cual es una contradicción. Por tanto, $q \in R_\omega[X]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea K_n componente de $X \setminus \{q\}$ tal que $r_n \in K_n$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $K_i \neq K_j$ para todo $i \neq j$. Luego, la sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface que, por el Corolario 1.38, la sucesión de componentes $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es nula. Dado que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $r_n \in K_n \cap R_\omega[X]$ y del Lema 3.4, podemos tomar $E_n \subset E[cl(K_n)] \setminus \{q\} \subset E[X]$ tal que $|E_n| = n$.

Ahora, fijemos $M \in \mathcal{D}_{O[X]}$ y para todo $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sea

$$M_B = M \cup \{q\} \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \cup \{r_n : n \in B\}.$$

Entonces $M_B \in \mathcal{D}_X$. Sean B y C elementos infinitos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y supongamos que existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h[M_B] = M_C$. Probemos que $B = C$. Sea $n \in B$, entonces $r_n \in M_B$ así, $h(r_n) \in M_C \cap R[X]$. Entonces, por el Teorema 1.1,

$$h[\{q\}] = h[(M_B \cap R[X])'] = (h[M_B \cap R[X]])' = (M_C \cap R[X])' = \{q\}.$$

Por tanto, $h(r_n) = r_j$, para algún $j \in C$. Dado que $h(q) = q$ y $h(r_n) = r_j$ entonces $h[K_n]$ es una componente de $X \setminus \{q\}$ que contiene a r_j, es decir, $h[K_n] = K_j$. Esto implica que $h[E_n] = h[K_n \cap M_B \cap E[X]] = K_j \cap M_C \cap E[X] = E_j$. Por el Teorema 1.10, $n = |E_n| = |E_j| = j$, entonces $n \in C$. De manera similar, se prueba que $C \subset B$. Por lo tanto, $B = C$.

Definiendo una función inyectiva $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{M}_X$ por $\phi(B) = [M_B]$ y por los Teoremas 1.9 y 2.6, concluimos que $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$. □

Otra condición para que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en una dendrita X es el continuo es la existencia de una infinidad de arcos cuya cantidad de puntos de ramificación de X es distinta, esto se prueba en el siguiente teorema.

3.6 Teorema. *Si X una dendrita tal que $J = \{|A \cap R[X]| : A \text{ es un arco en } X\}$ es infinito, entonces $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Por los Teoremas 3.3 y 3.5 podemos suponer que

1. $|R_\omega[X]| < \omega$.

2. Todos los arcos A en X satisfacen que $|A \cap R[X]| < \omega$.

Si X es un árbol entonces, X tiene una cantidad finita de puntos de ramificación dando como resultado que J es finito lo cual es una contradiccón, esto implica que X no es árbol. Por el Lema 1.46 y 2, obtenemos que $R_\omega[X] \neq \emptyset$. Sea $\hat{T}$ como en la Observación 1.47 y $\mathcal{K}$ familia de componentes de $X \setminus \hat{T}$. Dado que $\hat{T}$ es unión finita de arcos (o un singletón) y por la condición 2, se tiene que $|\hat{T} \cap R[X]| < \omega$. Si $K \in \mathcal{K}$ entonces, por el Corolario 1.49, $cl(K)$ es árbol. Por la misma razón que $\hat{T}$, se sigue cumple que $|K \cap R[X]| < \omega$.

Consideremos $J_0 = \{|K \cap R[X]| : K \in \mathcal{K}\}$. Como $|\hat{T} \cap R[X]| < \omega$ y J es infinito entonces J_0 es infinito. En efecto, si J_0 es finito, implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|K \cap R[X]| \leq n$ para todo $K \in \mathcal{K}$. Más aún, podemos suponer que $|\hat{T} \cap R[X]| \leq n$. Entonces para todo arco A en X se cumple que $|A \cap R[X]| \leq 3n$, debido a que A contiene puntos de $R[X]$ en $\hat{T}$ y en a lo más dos elementos de $\mathcal{K}$. Esto implica que J está acotado por $3n$, lo cual es una contradicción.

Se sigue que, podemos tomar una sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$, $K_i \neq K_j$ para todo $i \neq j$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $R_n \subset R[cl(K_n)] \setminus \hat{T}$ y $|R_n| = n$. Posteriormente, para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 1.35, fijemos $e_n \in E[cl(K_n)] \setminus \hat{T}$. Ahora, fijemos $M \in \mathcal{D}_{O[X]}$ y para cada $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definimos

$$M_B = M \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n \right) \cup \{e_n : n \in B\}.$$

Entonces $M_B \in \mathcal{D}_X$. Sean $B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y supongamos que existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h[M_B] = M_C$. Probemos que $B = C$. Sea $n \in B$, entonces $e_n \in M_B$ y $h(e_n) \in M_C \cap E[X]$, por lo que $h(e_n) = e_j$ para algún $j \in C$. Dado que $h(e_n) = e_j$ y que por el Teorema 1.48 se cumple que $h[\hat{T}] = \hat{T}$, entonces $h[K_n]$ es una componente de $X \setminus \hat{T}$ que contiene a e_j, así $h[K_n] = K_j$. Se sigue que

$$h[R_n] = h[K_n \cap M_B \cap R[X]] = K_j \cap M_C \cap R[X] = R_j.$$

Obtenemos que, por el Teorema 1.10, $n = |R_n| = |R_j| = j \in C$. De manera similar, se prueba que $C \subset B$. Por lo tanto, $B = C$.

Definimos una función inyectiva $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{M}_X$ por $\phi(B) = [M_B]$ y por los Teoremas 1.9 y 2.6, concluimos que $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$. □

3.7 Notación. Para una dendrita X, denotamos

$$OR_X = \{ord(r) : r \in R[X]\} \subset \mathbb{N} \cup \{\omega\}.$$

Otra manera, y la última, para obtener que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en una dendrita es el continuo es mediante la existencia de una infinidad de puntos de ramificación con ordenes distintos, esto se prueba en el siguiente teorema.

3.8 Teorema. *Si X es una dendrita tal que OR_X es infinito, entonces $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Tomemos $E = \{r_n : n \in \mathbb{N}\} \subset R[X]$ tal que $ord(r_n) \neq ord(r_k)$, para todo $n \neq k$. Fijemos $M \in \mathcal{D}_{O[X]}$ y para todo $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definimos

$$M_B = M \cup \{r_n : n \in B\}.$$

Entonces $M_B \in \mathcal{D}_X$. Sean $B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y supongamos que existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h[M_B] = M_C$. Entonces,

$$h[\{r_n : n \in B\}] = h[M_B \cap R[X]] = M_C \cap R[X] = \{r_n : n \in C\}.$$

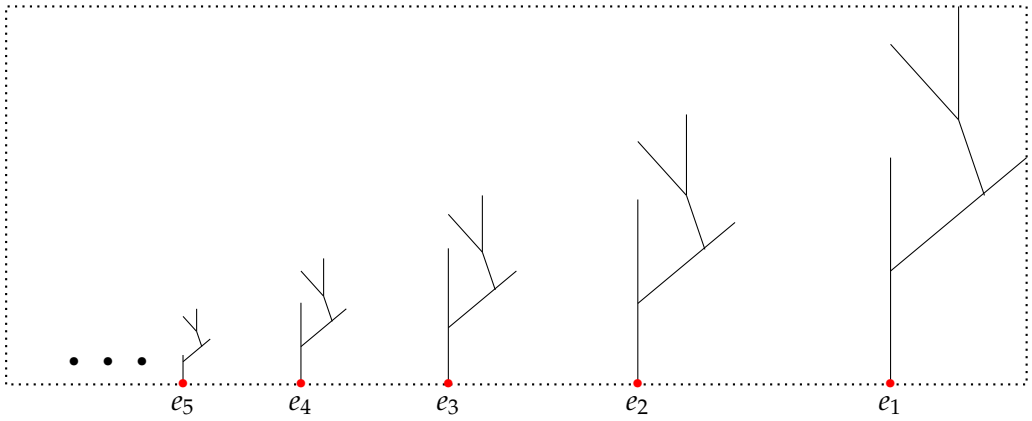
Probemos que $B = C$. Sea $m \in B$, por el Teorema 1.11, $ord(r_m) = ord(h(r_m))$ y por la elección de E, implica que la $h(r_m) = r_m$. De esto, se obtiene que $m \in C$. Similarmente, se prueba que $C \subset B$. Finalmente, definiendo una función inyectiva $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{M}_X$ por $\phi(B) = [M_B]$ y por los Teoremas 1.9 y 2.6, concluimos que $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$. □

Ya que hemos dado condiciones para que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en una dendrita sea el continuo, ahora nos enfocaremos a dar condiciones para que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en una dendrita sea ω. Primero lo haremos cuando la dendrita sea un árbol. Para eso, requerimos la siguiente notación.

3.9 Notación. Sea T un árbol, fijemos $e \in E[T]$ y supongamos T es encajado en $[1, \frac{3}{2}] \times [0, 1]$ de una manera que $e = (1, 0)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $T_n = \frac{1}{2^n}T$ y $e_n = (\frac{1}{2^n}, 0)$. Consideremos los conjuntos

$$Y = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n) \cup \{(0, 0)\} \quad \text{y} \quad Y_0 = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Definimos T_ω como espacio cociente obtenido de Y por la identificación del conjunto Y_0 en un punto singular. Denotemos por $\varphi : Y \to T_\omega$ el mapeo cociente. Para un árbol Z, denotemos por $V(Z)$ a la unión de $E[Z]$ y $R[Z]$.



El siguiente resultado prueba que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables del espacio cociente T_ω es ω.

3.10 Teorema. *Si T es árbol y $e \in E[T]$ entonces $d_{CDH}(T_\omega) = \omega$, donde T_ω es como en la Notación 3.9.*

Demostración. Sea $S = \mathcal{P}(V(T))$, digamos $S = \{S_1, \ldots, S_k\}$. Notemos que $k > 2$. Denotemos por $\hat{0}$ el elemento de $(\mathbb{N} \cup \{0\})^k$ en el cual todas las coordenadas son iguales a cero. Un elemento $(n_1, \ldots, n_k) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^k$ es denotado por $\hat{n}$. Luego, para todo $\hat{n} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^k$ definimos el conjunto

$$\alpha(\hat{n}) := \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup \left\{ \varphi\left[\frac{1}{2^i} S_j\right] : i \in \left\{ \left(\sum_{t=1}^{j-1} n_t \right) + 1, \ldots, \left(\sum_{t=1}^{j-1} n_t \right) + n_j \right\} \right\}.$$

Al ser una unión finita, para todo $\hat{n} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^k$, se cumple que $\alpha(\hat{n})$ es finito. Sea $\{P_1, \ldots, P_k\}$ una partición de $\mathbb{N}$ en subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Consideremos el conjunto $\Lambda := (\mathbb{N} \cup \{0\})^k \times [\mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}]$. Para cada $(\hat{n}, \mathcal{L}) \in \Lambda$ definimos

$$I(\mathcal{L}) := \{i \in \{1, \ldots, k\} : S_i \in \mathcal{L}\},$$
$$\mu(\mathcal{L}) := \min I(\mathcal{L}),$$
$$\beta(\hat{n}, \mathcal{L}) := \bigcup_{r \in I(\mathcal{L})} \bigcup \left\{ \varphi\left[\frac{1}{2^i} S_r\right] : i \in P_r \text{ y } i > \sum_{t=1}^{k} n_t \right\} \text{ y}$$
$$\gamma(\hat{n}, \mathcal{L}) := \bigcup_{r \notin I(\mathcal{L})} \bigcup \left\{ \varphi\left[\frac{1}{2^i} S_{\mu(\mathcal{L})}\right] : i \in P_r \text{ y } i > \sum_{t=1}^{k} n_t \right\}.$$

Como ejemplo, si $(\hat{n}, \mathcal{L}) \in \Lambda$ donde $\mathcal{L} = \{S_1, \ldots S_l\}$ y $l < k$.

$\frac{1}{2^1}T$	$\ldots$	$\frac{1}{2^{n_1}}T$	$\frac{1}{2^{n_1+1}}T$	$\ldots$	$\frac{1}{2^{n_1+n_2}}T$	$\ldots$	$\frac{1}{2^{\sum_{i=1}^{k-1} n_i+1}}T$	$\ldots$	$\frac{1}{2^{\sum_{i=1}^{k} n_i}}T$
$\cup$	$\ldots$	$\cup$	$\cup$	$\ldots$	$\cup$	$\ldots$	$\cup$	$\ldots$	$\cup$
$\frac{1}{2^1}S_1$	$\ldots$	$\frac{1}{2^{n_1}}S_1$	$\frac{1}{2^{n_1+1}}S_2$	$\ldots$	$\frac{1}{2^{n_1+n_2}}S_2$	$\ldots$	$\frac{1}{2^{\sum_{i=1}^{k-1} n_i+1}}S_k$	$\ldots$	$\frac{1}{2^{\sum_{i=1}^{k} n_i}}S_k$
n_1			n_2			$\ldots$	n_k		

$P_1 \setminus \{1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} n_i\}$	$\ldots$	$P_l \setminus \{1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} n_i\}$	$P_{l+1} \setminus \{1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} n_i\}$	$\ldots$	$P_k \setminus \{1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} n_i\}$
S_1	$\ldots$	S_l	$S_{\mu(\mathcal{L})}$	$\ldots$	$S_{\mu(\mathcal{L})}$
$\mathcal{L}$					
$\beta(\hat{n}, \mathcal{L})$			$\gamma(\hat{n}, \mathcal{L})$		

Como $P_1, \ldots, P_k$ son numerables, los conjuntos $\beta(\hat{n}, \mathcal{L})$ y $\gamma(\hat{n}, \mathcal{L})$ son numerables, para todo $(\hat{n}, \mathcal{L}) \in \Lambda$. Fijemos $M \in \mathcal{D}_{O[T_\omega]}$ y para todo $(\hat{n}, \mathcal{L}) \in \Lambda$ tomemos

$$M(\hat{n}, \mathcal{L}) := M \cup \alpha(\hat{n}) \cup \beta(\hat{n}, \mathcal{L}) \cup \gamma(\hat{n}, \mathcal{L}) \text{ y}$$
$$\mathcal{C} := \{M(\hat{n}, \mathcal{L}) : (\hat{n}, \mathcal{L}) \in \Lambda\}.$$

Notemos que cada $M(\hat{n}, \mathcal{L})$ pertenece a $\mathcal{D}_{T_\omega}$ y $\mathcal{C}$ es numerable. Probemos que todo subconjunto denso numerable de T_ω es equivalente a un elemento de $\mathcal{C}$. Sea $N \in \mathcal{D}_{T_\omega}$. Para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, definimos

$$Q_i := \left\{ q \in \mathbb{N} : N \cap \varphi\left[V(T_q)\right] = \varphi\left[\frac{1}{2^q} S_i\right] \right\}.$$

Observemos que $\bigcup_{i=1}^{k} Q_i = \mathbb{N}$. Si Q_i es finito, entonces tomemos $n_i := |Q_i|$, de otra forma tomemos $n_i = 0$. Definimos $\hat{n} := (n_1, \ldots, n_k)$ y $\mathcal{L} = \{S_i \in S : Q_i \text{ es infinito}\}$. Dado que $\bigcup_{i=1}^{k} Q_i = \mathbb{N}$, necesariamente $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Por tanto, $(\hat{n}, \mathcal{L}) \in \Lambda$. Probemos que existe un homeomorfismo $h : T_\omega \to T_\omega$ tal que $h[N] = M(\hat{n}, \mathcal{L})$.

Primeramente, elegimos una función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ satisface que:

$$f[Q_i] = \begin{cases} \left\{\left(\sum_{t=1}^{i-1} n_t\right) + 1, \ldots, \left(\sum_{t=1}^{i-1} n_t\right) + n_i\right\} & \text{si} \quad Q_i \text{ es finito,} \\ P_i \cap \left(\sum_{t=1}^{k} n_t, \infty\right) & \text{si} \quad Q_i \text{ es infinito y } i \neq \mu(\mathcal{L}), \\ \left(P_i \cup \bigcup_{r \notin I(\mathcal{L})} P_r\right) \cap \left(\sum_{t=1}^{k} n_t, \infty\right) & \text{si} \quad Q_i \text{ es infinito y } i = \mu(\mathcal{L}). \end{cases}$$

Ahora, para cada $i \in \mathbb{N}$, sean $N_i, M_i \subset T$ tales que $\varphi[\frac{1}{2^i} N_i] = N \cap \varphi[O[T_i]]$ y $\varphi[\frac{1}{2^i} M_i] = M \cap \varphi[T_i]$. Notemos que $N_i, M_{f(i)} \in \mathcal{D}_{O[T]}$ pues, $N \in \mathcal{D}_{T_\omega}$ y $M \in D_{O[T_\omega]}$. Por el Teorema 2.8, tomando a $F = \emptyset$, existe un homeomorfismo $g_i : T \to T$ tal que $g_i[N_i] = M_{f(i)}$ y $g_i \restriction_{V(T)}$ es la identidad; esto sucede para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definimos una función $g : Y \to Y$ dada por $g(0,0) = (0,0)$ y $g(\frac{1}{2^i} x) = \frac{1}{2^{f(i)}} g_i(x)$, para todo $i \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in T$. Por el Teorema 1.3, $g \restriction_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n}$ es un homeomorfismo y g es función continua en $(0,0)$ pues sea $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Y tal que $\lim_{n \to \infty} t_n = (0,0)$ entonces, por ser $g \restriction_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n}$ homeomorfismo, $\lim_{n \to \infty} g(t_n) = g(0,0) = (0,0)$. De manera, análoga se prueba que la función g^{-1} es continua en $(0,0)$. Por lo tanto, g es un homeomorfismo. Asimismo, $\varphi \circ g : Y \to T_\omega$ es un mapeo cociente.

Notemos que φ es constante en cada fibra $(\varphi \circ g)^{-1}(t)$ y $\varphi \circ g$ es constante en cada fibra $\varphi^{-1}(t)$. Basta observar que para todo $i \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in T$ se cumple que:

- $\varphi^{-1}[Y_0] = Y_0 = g^{-1}[Y_0] = (g^{-1} \circ \varphi^{-1})[Y_0] = (\varphi \circ g)^{-1}[Y_0]$.
- $\varphi^{-1}[\frac{1}{2^i} x] = \{\frac{1}{2^i} x\} = g^{-1}[\frac{1}{2^{f(i)}} g_i(x)] = (g^{-1} \circ \varphi^{-1})[\frac{1}{2^{f(i)}} g_i(x)] = (\varphi \circ g)^{-1}[\frac{1}{2^{f(i)}} g_i(x)]$.

Se sigue que por el Lema de Transgresión, Teorema 1.34, aplicado a los mapeos cocientes φ y a $\varphi \circ g$, existe un homeomorfismo $h : T_\omega \to T_\omega$ tal que $h \circ \varphi = \varphi \circ g$.

Luego, para todo $i \in \mathbb{N}$ y para todo $B \subseteq V(T)$, como $g_i \restriction_{V(T)}$ es la identidad, se tiene que $h[\varphi[\frac{1}{2^i} B]] = \varphi[g[\frac{1}{2^i} B]] = \varphi[\frac{1}{2^{f(i)}} g_i[B]] = \varphi[\frac{1}{2^{f(i)}} B]$. Por lo tanto, $\varphi[\frac{1}{2^i} B] = h^{-1}[\varphi[\frac{1}{2^{f(i)}} B]]$.

Para probar que $h[N] = M(\hat{n}, \mathcal{L})$ es suficiente mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $h[N] \cap \varphi[T_n] = M(\hat{n}, \mathcal{L}) \cap \varphi[T_n]$. Primero, demostremos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $h[N] \cap \varphi[T_n] \cap V(T_\omega) = M(\hat{n}, \mathcal{L}) \cap \varphi[T_n] \cap V(T_\omega)$.
2. $h[N] \cap \varphi[T_n] \cap O[T_\omega] = M(\hat{n}, \mathcal{L}) \cap \varphi[T_n] \cap O[T_\omega]$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y vamos a demostrar 1. Dado que $\bigcup_{i=1}^{k} Q_i = \mathbb{N}$ y $f^{-1}(n) \in \mathbb{N}$, existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $f^{-1}(n) \in Q_i$, entonces $n \in f[Q_i]$. Se sique que

(I) $n \in \left\{(\sum_{t=1}^{i-1} n_t) + 1, \ldots, (\sum_{t=1}^{i-1} n_t) + n_i\right\}$, si Q_i es finito.

(II) $n \in P_i \cap (\sum_{t=1}^{k} n_t, \infty)$, si Q_i es infinito y $i \neq \mu(\mathcal{L})$.

(III) $n \in (P_i \cup \bigcup_{r \notin I(\mathcal{L})} P_r) \cap (\sum_{t=1}^{k} n_t, \infty)$, si Q_i es infinito y $i = \mu(\mathcal{L})$.

Podemos deducir que,

$$h[N] \cap \varphi[T_n] \cap V(T_\omega) = h[N] \cap \varphi[V(T_n)] = h[N \cap h^{-1}[\varphi[\frac{1}{2^n} V(T)]]]$$
$$= h[N \cap \varphi[\frac{1}{2^{f^{-1}(n)}} V(T)] = h[N \cap \varphi[V(T_{f^{-1}(n)})]] = h[\varphi[\frac{1}{2^{f^{-1}(n)}} S_i]]$$
$$= \varphi[g[\frac{1}{2^{f^{-1}(n)}} S_i]] = \varphi[\frac{1}{2^n} g_{f^{-1}(n)}[S_i]] = \varphi[\frac{1}{2^n} S_i].$$

De esta manera, obtenemos que $h[N] \cap \varphi[T_n] \cap V(T_\omega) = \varphi[\frac{1}{2^n} S_i]$. Por otro lado, notemos que $M(\hat{n}, \mathcal{L}) \cap \varphi[T_n] \cap V(T_\omega) = M(\hat{n}, \mathcal{L}) \cap \varphi[V(T_n)]$ y consideremos 3 casos:

(i) Si Q_i es finito, entonces $n \in \left\{(\sum_{t=1}^{i-1} n_t) + 1, \ldots, (\sum_{t=1}^{i-1} n_t) + n_i\right\}$, esto implica que

$$M(\hat{n}, \mathcal{L}) \cap \varphi[V(T_n)] = \alpha(\hat{n}) \cap \varphi[V(T_n)] = \varphi[\frac{1}{2^n} S_i].$$

(ii) Si Q_i es infinito y $i \neq \mu(\mathcal{L})$, entonces $n \in P_i \cap (\sum_{t=1}^{k} n_t, \infty)$, esto implica que

$$M(\hat{n}, \mathcal{L}) \cap \varphi[V(T_n)] = \beta(\hat{n}, \mathcal{L}) \cap \varphi[V(T_n)] = \varphi[\frac{1}{2^n} S_i].$$

(iii) Si Q_i es infinito y $i = \mu(\mathcal{L})$, entonces $n \in (P_i \cup \bigcup_{r \notin I(\mathcal{L})} P_r) \cap (\sum_{t=1}^{k} n_t, \infty)$, esto implica que

$$M(\hat{n}, \mathcal{L}_0) \cap \varphi[V(T_n)] = \gamma(\hat{n}, \mathcal{L}) \cap \varphi[V(T_n)] = \varphi[\frac{1}{2^n} S_i].$$

Por tanto, se satisface la condición 1. Ahora, demostremos la condición 2. Primero, observemos que

$$h[\varphi[O[T_{f^{-1}(n)}]]] = \varphi[g[\frac{1}{2^{f^{-1}(n)}}O[T]]] = \varphi[\frac{1}{2^n}g_{f^{-1}(n)}[O[T]]] = \varphi[\frac{1}{2^n}O[T]] = \varphi[O[T_n]].$$

Por tanto, $\varphi[O[T_{f^{-1}(n)}]] = h^{-1}[\varphi[O[T_n]]]$. Se sigue que

$$h[N] \cap \varphi[T_n] \cap O[T_\omega] = h[N] \cap \varphi[O[T_n]] = h[N \cap h^{-1}[\varphi[O[T_n]]]]$$
$$= h[N \cap \varphi[O[T_{f^{-1}(n)}]]] = h[\varphi[\frac{1}{2^{f^{-1}(n)}}N_{f^{-1}(n)}]] = \varphi[g[\frac{1}{2^{f^{-1}(n)}}N_{f^{-1}(n)}]]$$
$$= \varphi[\frac{1}{2^n}g_{f^{-1}(n)}[N_{f^{-1}(n)}]] = \varphi[\frac{1}{2^n}M_n] = M \cap \varphi[T_n] = M(\hat{n}, \mathcal{L}) \cap \varphi[T_n] \cap O[T_\omega].$$

Por tanto se satisface la condición 2. Asimismo, de las condiciones 1 y 2 implica que $h[N] = M(\hat{n}, \mathcal{L})$. Dado que $\mathcal{C}$ es numerable y definiendo una función sobreyectiva $f : \mathcal{C} \to \mathfrak{M}_{T_\omega}$ definida por $f(M(\hat{n}, \mathcal{L})) = [M(\hat{n}, \mathcal{L})]$ concluimos que $d_{CDH}(T_\omega) \leq \omega$. Como T_ω no es un árbol, por el Teorema 3.1, obtenemos que $d_{CDH}(T_\omega) = \omega$. □

Gracias al resultado anterior, tenemos un ejemplo de una dendrita cuyo grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables es ω. Como consecuencia, de todo el trabajo expuesto hasta el momento, podemos argumentar el primer resultado importante de esta tesis, el cual es la caracterización para que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en dendritas sea ω.

3.11 Teorema. *Sea X una dendrita que no es un árbol entonces $d_{CDH}(X) = \omega$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1) $A \cap R[X]$ es finito, para todo arco $A \subset X$.

2) $R_\omega[X]$ es finito.

3) El conjunto $J = \{|A \cap R[X]| : A \text{ es un arco en } X\}$ es finito.

4) OR_X es finito.

Demostración. Si suponemos que $d_{CDH}(X) = \omega$ entonces por los Teoremas 3.3, 3.5, 3.6 y 3.8 se cumplen las condiciones 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

Ahora, supongamos que se cumplen las cuatro condiciones. Si $R_\omega[X]$ es vacío, por el Teorema 1.46, X es un árbol lo cual es una contradicción. Por lo que, $R_\omega[X]$ es distinto del vacío. Sea $\hat{T}$ como en la Notación 1.47. Como $\hat{T}$ es unión finita de arcos (o un singletón), por la condición 1, tenemos que $|\hat{T} \cap R[X]| < \omega$.

Si $\hat{T}$ es no degenerado, entonces $E[\hat{T}] \subset R_\omega[X]$ por la construcción de $\hat{T}$. En cualquier caso, afirmamos que $fr(\hat{T}) \subset R[X]$. En efecto, sea $x \in fr(\hat{T}) \subset \hat{T}$, entonces

existen $a, b \in R_\omega[X]$ tales que $x \in ab$. Por la condición 1, tenemos que $ab \cap R[X] = \{z_1, \ldots, z_m\}$. Si $x \in \{a, z_1, \ldots, z_m, b\}$, entonces terminamos. De lo contrario, existe U conjunto abierto de X tal que $x \in U \cap ab$ y $U \cap \{z_1, \ldots, z_m\} = \emptyset$. Luego, por ser X un espacio de Peano, existe V conjunto abierto conexo de X tal que $x \in V \subset U$. Como $x \in fr(\hat{T})$, tenemos que existe $y \in V \setminus \hat{T}$. Por el Teorema 1.21, obtenemos la existencia del arco xy. Por el Lema 1.39, $V \cap ab$ contiene un punto de ramificacion en X, lo cual es una contradicción. Por tanto, $fr(\hat{T}) \subset R[X]$ y como consecuencia de que $\hat{T} \cap R[X]$ es finito, tenemos que $fr[T]$ es finito.

Luego, sea $\mathcal{K}$ una familia de componentes de $X \setminus \hat{T}$. Si $K \in \mathcal{K}$, por el Corolario 1.49, entonces $cl(K)$ es árbol. Por la condición 4 y el Teorema 1.28 4, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c(x, X) \leq n_0$ para todo $x \in X$. Sea $x \in cl(K) \setminus \hat{T}$ y supongamos que $c(x, X) = m$ para algún $m \leq n_0$. Sea C la componente conexa de $X \setminus \{x\}$ que contiene a $\hat{T}$ y sea C_m componente conexa de $cl(K)$ que intersecta a $\hat{T}$. Así, existen $C_1, \ldots, C_{m-1}$ componentes conexas de $X \setminus \{x\}$ distintas de C. Observemos que $C_1, \ldots C_{m-1}, C_m$ son las componentes conexas de $cl(K) \setminus \{x\}$. Por el Teorema 1.28 4, se sigue que $ord(x, cl(K)) = ord(x, X) \leq n_0$. De esto y de la condición 3, sin pérdida de generalidad, podemos tomar a n_0 tal que las siguientes condiciones se cumplen:

I. Todo arco A en $cl(K)$ cumple que $|A \cap R[cl(K)]| \leq n_0$.

II. Todo $x \in cl(K) \setminus \hat{T}$ cumple que $ord(x, cl(K)) = ord(x, X) \leq n_0$.

III. Si $x \in cl(K) \cap \hat{T}$ entonces $ord(x, cl(K)) = 1 \leq n_0$. (véase el Teorema 1.35)

Analicemos los siguientes dos casos:

Caso 1. $|R_\omega[X]| = 1$.

Para este caso, sea $v \in X$ tal que $R_\omega[X] = \{v\} = \hat{T}$. Para todo $K \in \mathcal{K}$, definimos $\mathcal{L}_K = \{Q \in \mathcal{K} : \text{existe un homemomorfismo } h : cl(K) \to cl(Q) \text{ tal que } h(v) = v\}$. Sea $\mathcal{K}_0 = \{K \in \mathcal{K} : \mathcal{L}_K \text{ es infinito}\}$. Notemos que por el Corolario 1.49, el Teorema 1.43 y de las condiciones I y II se obtiene que

a) $\mathcal{K}_0 \neq \emptyset$.

b) $\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$ es finito.

c) Existe $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_0$ finito tal que para todo $K \in \mathcal{K}_0$, existe $K_1 \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{L}_K$.

Observemos que $\bigcup_{K \in \mathcal{K}_0} cl(K) = \bigcup_{K \in K_1} \bigcup_{Q \in \mathcal{L}_K} cl(Q)$. Por tanto,

$$X = \bigcup_{K \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0} cl(K) \cup \bigcup_{K \in \mathcal{K}_1} \bigcup_{Q \in \mathcal{L}_K} cl(Q).$$

Luego, para cada $K \in \mathcal{K}_1$ tomamos el árbol $cl(K)$ y consideramos la construcción presentada en la Notación 3.9 tomando como el punto extremo e igual a v. Al igual que en la Notación 3.9, denotamos al correspondiente espacio cociente por $cl(K)_\omega$.

Sea $K \in \mathcal{K}_1$, por el Teorema 1.38, observamos $\bigcup_{Q\in\mathcal{L}_K} cl(Q)$ es homeomorfo de $cl(K)_\omega$; de esto y del Teorema 3.10, obtenemos que $d_{CDH}\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{L}_K} cl(Q)\right) = \omega$. Sin embargo, debido a que $R_\omega[\bigcup_{Q\in\mathcal{L}_K} cl(Q)] = \{v\}$, obtenemos que

$$d_{CDH}\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{L}_K} cl(Q), \{v\}\right) = \omega$$

Recordemos que $\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_1$ son finitos y tomemos a $Y_0 = \{v\}$. Observemos que por el Teorema 1.35 se cumple las siguientes condiciones:

- $cl(K) \cap Y_0 = \bigcup_{Q\in\mathcal{L}_{K'}} cl(Q) \cap Y_0 = Y_0$, para todo $K \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$ y para todo $K' \in \mathcal{K}_1$.
- $cl(K) \cap cl(Q) = Y_0$, para cada $K, Q \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$ distintos.
- $\bigcup_{Q'\in\mathcal{L}_{K'}} \bigcup_{Q''\in\mathcal{L}_{K''}} cl(Q') \cap cl(Q'') = Y_0$ para cada $K', K'' \in \mathcal{K}_1$ distintos.
- $\bigcup_{Q\in\mathcal{L}_{K'}} cl(Q) \cap cl(K) = Y_0$, para todo $K \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$ y $K' \in \mathcal{K}_1$.
- $d_{CDH}(cl(K), Y_0) < \omega$, para todo $K \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$ (Se obtiene de que $cl(K)$ es árbol y del Corolario 2.9).
- $d_{CDH}(\bigcup_{Q\in\mathcal{L}_K} cl(Q), Y_0) = \omega$, para todo $K \in \mathcal{K}_1$.

Por los Teoremas 3.1, 2.5 y 2.11, obtenemos que $\omega \leq d_{CDH}(X) \leq d_{CDH}(X, \{v\}) \leq \omega$. Por tanto, $d_{CDH}(X) = d_{CDH}(X, \{v\}) = \omega$.

Caso 2. $|R_\omega[X]| > 1$.

Para cada $x \in fr(\hat{T})$ definimos $C_x = \bigcup\{cl(K) : K \in \mathcal{K}, x \in cl(K)\}$. Se sigue de los Teoremas 1.27 y 1.38 que C_x es dendrita. Sea $x \in fr(\hat{T})$. Si C_x es un árbol entonces, el Corolario 2.9 garantiza que $d_{CDH}(C_x, \{x\}) < \omega$. Si C_x no es un árbol entonces, el Teorema 1.46 garantiza que $R_\omega[C_x] \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.6, tenemos que $R_\omega[C_x] = \{x\}$. Notemos que C_x es una dendrita que satisface las condiciones 1, 2, 3 y 4. Por el Caso 1, tenemos que $d_{CDH}(C_x, \{x\}) = \omega$.

Finalmente, notemos que $X = \hat{T} \cup \bigcup\{C_x : x \in fr(\hat{T})\}$. Además, recordemos que $fr(\hat{T})$ es finito y tomamos $Y_0 = \hat{T}$. Observemos que para todo $z, z' \in fr(\hat{T})$ distintos se cumple que $C_z \cap Y_0 = \{z\}$, $C_z \cap C_{z'} = \emptyset \subset Y_0$ y $d_{CDH}(C_z, \{z\}) \leq \omega$. Por los Teoremas 3.1, 2.5 y 2.11, se cumple que $\omega \leq d_{CDH}(X) \leq d_{CDH}(X, \bigcup\{x : x \in fr(\hat{T}\}) \leq \omega$. Por lo tanto, $d_{CDH}(X) = \omega$. □

El segundo resultado importante de este trabajo, es que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en dendritas solo puede ser finito, ω o $\mathfrak{c}$. Más aún, el siguiente corolario nos muestra en qué momento el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en dendritas toma esos valores y su justificación es una consecuencia inmediata de los Teoremas 3.1, 3.3, 3.5, 3.6, 3.8 y 3.11. Además, mediante el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables podemos saber cuándo una dendrita es un árbol y cuándo no lo es; y también saber las propiedades que cumplen sus arcos y sus puntos de ramificación.

3.12 Corolario. *Si X es una dendrita, entonces $d_{CDH}(X) \in \mathbb{N} \cup \{\omega, \mathfrak{c}\}$. Más aún:*

a) $d_{CDH}(X) \in \mathbb{N}$ *si y sólo si X es un árbol.*

b) $d_{CDH}(X) = \omega$ *si y sólo si X no es árbol y cumple las siguientes condiciones:*

1. $A \cap R[X]$ *es finito, para todo arco $A \subset X$.*
2. $R_\omega[X]$ *es finito.*
3. *El conjunto $J = \{|A \cap R[X]| : A$ es un arco en $X\}$ es finito.*
4. OR_X *es finito.*

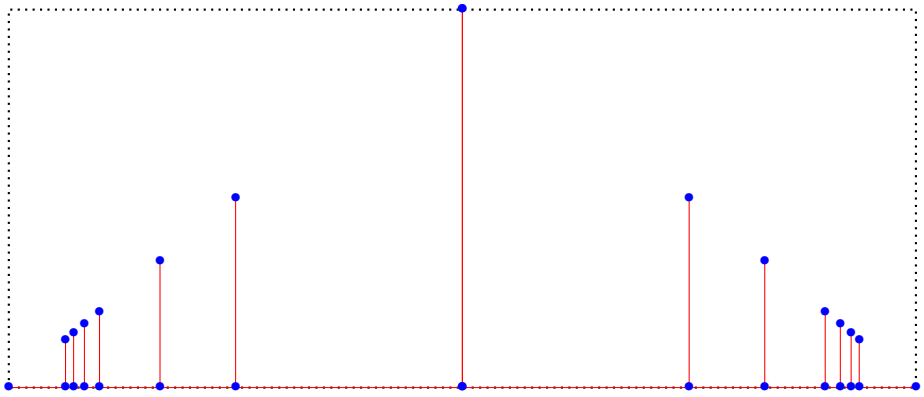
c) $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$ *en cualquier otro caso.*

El siguiente resultado muestra que si el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables de un espacio localmente compacto es a lo más ω, entonces existe cierto subconjunto tal que su complemento es homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables. Su demostración se encuentra en [21].

3.13 Teorema. *Sea X localmente compacto teniendo a lo más una cantidad numerable de clases de equivalencia de subconjuntos densos numerables. Entonces X contiene un conjunto cerrado y disperso L de rango de Cantor-Bendixson finito el cual es invariante bajo todos los homeomorfimos de X y que tiene la propiedad de que $X \setminus L$ es homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables. Más aún, si X tiene a lo más n clases de equivalencia de subconjuntos densos numerables para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $|L| \leq n - 1$.*

Una pregunta natural es si el recíproco del teorema anterior es verdadero. Sin embargo, el siguiente ejemplo prueba que no lo es.

3.14 Ejemplo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto A_n denota el segmento de $\mathbb{R}^2$ que conecta los puntos $(1 - \frac{1}{n}, 0)$ y $(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Definimos a $Z = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ y a $C = Z \cup \{(-x, y) : (x, y) \in Z\}$. Sea $L = E[C] \cup R[C]$.



Entonces el rango de Cantor-Bendixson de L es dos y como todo homeomorfismo manda puntos extremos a puntos extremos y de la misma forma para los puntos de ramificación. Entonces L es invariante bajo todos los homeomorfimos de C.

Afirmamos que $C \setminus L$ es homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables. En efecto, sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de componentes de $C \setminus L$. Luego, sean M, N densos numerables de $C \setminus L$. Entonces, $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M \cap X_n$ y $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N \cap X_n$ donde para todo $n \in \mathbb{N}$, $M \cap X_n$ y $N \cap X_n$ son subconjuntos densos numerables de X_n. Se sigue del Teorema 1.15, que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un homeomorfismo $f_n : X_n \to X_n$ tal que $f_n[M \cap X_n] = N \cap X_n$. Definimos $h : C \setminus L \to C \setminus L$ por $h(x) = f_n(x)$ si $x \in X_n$ y por el Teorema 1.3, h es un homeomorfismo tal que $h[M] = N$. Es decir, $C \setminus L$ es homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables.

Sin embargo, tomando el arco que conecta los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ contiene una cantidad infinita de puntos de $R[C]$. Por el Teorema 3.3, concluimos que $d_{CDH}(C) = \mathfrak{c}$. ■

Capítulo 4

Caracterización de $d_{CDH}(X)$ en dendroides

En este último capítulo calculamos el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en dendroides. Como ya hicimos el caso de las dendritas, bastará analizar el caso cuando sean dendroides que no sean dendritas. Es decir, los dendroides que no sean espacios de Peano. Para estos últimos, probamos que contienen un arco con interior vacío y debido a esto, su grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables es el continuo (véase Teorema 4.4 y Corolario 4.5). Como consecuencia, determinamos que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en dendroides es finito, ω o $\mathfrak{c}$. Más aún, vamos a mostrar en el Corolario 4.6 una caracterización de cuando el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en dendroides sea ω, mediante las siguientes condiciones:

1. Todo arco contiene una cantidad finita de puntos de ramificación.
2. Contiene una cantidad finita de puntos de orden ω.
3. Contiene una cantidad finita de arcos cuya cantidad de puntos de ramificación es distinta.
4. Contiene una cantidad finita de puntos de orden finito o ω.

Ahora, recordemos que un continuo X es *hereditariamente unicoherente* si para todo subcontinuo P de X cumple que para cualesquiera dos subcontinuos A y B de P tales que $P = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

4.1 Definición. Un *dendroide* es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente.

4.2 Observación. Sea X un continuo de Peano. Entonces X es un dendroide si y sólo si X es una dendrita.

Recordemos que el conjunto $CL(X) = \{A \subset X : A \text{ no vacío y cerrado en } X\}$ es llamado *el hiperespacio de cerrados* de X.

4.3 Definición. Sean X continuo y $A, B \in CL(X)$. Definimos:

1. La *nube* de radio $r > 0$ y centrada en A denotada por
$$N_X(r, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < r\}.$$
2. La *métrica de Hausdorff* como la función $H : CL(X) \times CL(X) \to \mathbb{R}$ dada por $H(A, B) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subset N_X(B, r) \text{ y } B \subset N_X(A, r)\}$.

Las propiedades de esta métrica se pueden encontrar en [1].

El siguiente resultado nos da condiciones para que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en dendroides sea $\mathfrak{c}$.

4.4 Teorema. *Si X es un dendroide que contiene un arco con interior vacío, entonces $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea F_n un subconjunto finito de X tal que $H(F_n, X) < \frac{1}{n}$; podemos suponer que para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subset F_{n+1}$. Usando la arcoconexidad de X, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos un árbol $T_n \subset X$ tal que $F_n \subset T_n \subset T_{n+1}$. Más aún, para cada $n \in \mathbb{N}$ fijemos $E_n \subset \mathcal{D}_{T_n}$ y $E_n \subset E_{n+1}$. Sea $\tilde{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Dado que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $H(T_n, X) < \frac{1}{n}$, tenemos que $\tilde{E} \in \mathcal{D}_X$.

Por hipótesis, sea L un arco de X tal que $int(L) = \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $a_0, b_0, \leq_L, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y D_n como en el Teorema 2.12.

Definimos $E = \tilde{E} \setminus L$. Dado que $|E| \leq |\tilde{E}|$ y por ser $\tilde{E}$ subconjunto numerable, tenemos que E es numerable. Además, como $\overline{E} = \overline{X \setminus L} = X \setminus int(L) = X$ se sigue que $E \in \mathcal{D}_X$.

Luego, para cada $K \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definimos
$$M_K = E \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\right) \cup \{b_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{a_{3n} : n \in K\} \cup \{a_0\}.$$

Dado que $E \in \mathcal{D}_X$, tenemos que $M_K \in \mathcal{D}_X$. Probemos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1. *Si y, z son puntos distintos de E tales que $yz \cap L = \emptyset$, entonces $yz \cap E$ es denso en yz.*

En efecto, notemos que $y, z \in \tilde{E}$. Entonces existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $y, z \in E_s \subset T_s$, como T_s es un árbol implica que $yz \subset T_s$. De esta forma $yz \cap E_s$ es denso en yz. Debido a que $yz \cap L = \emptyset$, se obtiene que $yz \cap E$ es denso en yz.

Afirmación 2. *Fijando $K, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Si $h : X \to X$ es homeomorfismo tal que $h[M_K] = M_Q$, entonces $h[L] = L$.*

En efecto, sea Z el conjunto de puntos de $M_{\mathbb{N}}$ que cumplen dos condiciones:

(i) Toda vecindad U de x contiene un arco A_x tal que $x \in E[A_x]$.

(ii) $cl(A_x \cap M_\emptyset)$ contiene una cantidad infinita de sus componentes distintas que convergen a $\{x\}$ en la métrica Hausdorff.

De la Afirmación 1, obtenemos que $Z \subset M_{\mathbb{N}} \setminus E \subset L$. En efecto, si existe $z \in Z \cap E$, entonces $X \setminus L$ contiene un arco A_z tal que $z \in E[A_z]$. Si $A_z \setminus \{z\} \cap E = \emptyset$, entonces $cl(A_z \cap M_\emptyset) = \{z\}$, lo cual contradice la condición (ii). Así, obtenemos que existe $y \in A_z \setminus \{z\} \cap E$. Dado que X es arcoconexo de forma única, yz es un subarco de A_z y por la afirmación 1 tenemos que $yz \cap E$ es denso en yz. Sin embargo, $cl(yz \cap M_\emptyset)$ no contiene una cantidad infinita de sus componentes distintas que convergen a $\{z\}$ con la métrica Hausdorff, lo cual es una contradicción. De esta forma, se satisface que $Z \subset M_{\mathbb{N}} \setminus E$.

De la condición (ii) podemos garantizar que $Z \cap (\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{3n} : n \in \mathbb{N}\}) = \emptyset$. Más aún, las condiciones (i) y (ii) garantizan que $Z \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n) = \emptyset$. Por tanto, obtenemos que Z es un conjunto que consta de solo dos puntos, $Z = \{a_0, b_0\}$. Similarmente, observamos que a_0 y b_0 son los únicos puntos de M_K (o M_Q) que satisfacen las condiciones (i) y (ii) (si reemplazamos $M_\emptyset$ con M_K o M_Q). Esto y la hipotesis de que $h[M_K] = M_Q$ implica que $h[Z] = Z$, entonces $h[L] = L$. De la afirmación 2 y de los Teoremas 2.12, 2.6 y 1.9, concluimos que $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$. □

El siguiente resultado muestra la existencia de un arco con interior vacío en los dendroides que no son de Peano. Como consecuencia del teorema anterior, obtenemos que su grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables es el continuo.

4.5 Corolario. *Si X es un dendroide que no es de Peano, entonces $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Por el Teorema 1.22, X es un dendroide que no es conexo en pequeño. Entonces el conjunto $N = \{x \in X : X \text{ no es conexo en pequeño en } x\} \neq \emptyset$. Sea $p \in N$, por el Teorema 1.31, existe un subcontinuo de convergencia (no degenerado) K de X tal que $p \in K$ y $K \subset N$. Entonces existe una sucesión de subcontinuos disjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $K = \lim A_n$ y $K \cap A_n = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, notemos que K es un dendroide.

Sea $q \in K$ distinto de p, entonces $pq \subset K$. Afirmamos que $int(pq) = \emptyset$. En efecto, si existe $z \in int(pq)$, entonces existe U conjunto abierto de X tal que $z \in U \subset pq$. Por ser K continuo de convergencia, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_m \neq \emptyset$. Sea $a \in U \cap A_m$, entonces $a \in pq \cap A_m \subset K \cap A_m$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $int(pq) = \emptyset$. Por el Teorema 4.4, concluimos que $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$. □

El segundo resultado importante de este capítulo es, que el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en dendroides solo puede ser finito, ω o $\mathfrak{c}$. Más aún, podemos caracterizar el grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables en dendroides, esto sucede como consecuencia de la Observación 4.2 y de los Corolarios 3.12 y 4.5. Además, mediante el grado

de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables podemos saber cuándo un dendroide es una dendrita y cuándo no lo es; y también saber las propiedades que cumplen sus arcos y sus puntos de ramificación.

4.6 Corolario. *Si X es un dendroide, entonces $d_{CDH}(X) \in \mathbb{N} \cup \{\omega, \mathfrak{c}\}$. Más aún:*

a) $d_{CDH}(X) \in \mathbb{N}$ *si y sólo si X es un árbol.*

b) $d_{CDH}(X) = \omega$ *si y sólo si X es una dendrita que no es árbol y cumple las siguientes condiciones:*

1. $A \cap R[X]$ *es finito, para todo arco $A \subset X$.*
2. $R_\omega[X]$ *es finito.*
3. *El conjunto $J = \{|A \cap R[X]| : A \text{ es un arco en } X\}$ es finito.*
4. OR_X *es finito.*

c) $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$ *en cualquier otro caso.*

4.7 Definición. Un *abanico* es un dendroide que tiene exactamente un punto de ramificación.

El siguiente resultado nos muestra que para saber si un abanico es F_ω, basta conocer que su grado de homogeneidad respecto a subconjuntos densos numerables es ω.

4.8 Teorema. *Sea X un abanico. Entonces $d_{CDH}(X) = \omega$ si y sólo si X es F_ω.*

Demostración. Si $d_{CDH}(X) = \omega$ entonces, por el Corolario 4.5, X es continuo de Peano y por la Observación 4.2, tenemos que X es una dendrita. Por los Teoremas 3.1 y 1.42, obtenemos que X no es un árbol y contiene una copia de F_ω o un peine. Si X contiene un peine, entonces X contiene un arco con una cantidad infinita de puntos de ramificación y, por el Teorema 3.3, tenemos que $d_{CDH}(X) = \mathfrak{c}$, lo cual es una contradicción. De esta forma, tenemos que X contiene una copia de F_ω y sea p el punto que tiene orden ω en esa copia.

Como X es un abanico, obtenemos que $R_\omega[X] = \{p\}$. Entonces, existe una sucesión de componentes $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $X\setminus\{p\}$. Por el Teorema 1.38, la sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es nula. Por el Teorema 1.35, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $cl(K_n) = K_n \cup \{p\}$ es una dendrita con $p \in E[cl(K_n)]$ y $\emptyset \neq E[cl(K_n)] \setminus \{p\} \subset E[X]$. Afirmamos que $cl(K_n)$ es un arco, para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que existen $a, b \in E[cl(K_n)] \setminus \{p\}$ distintos, por el Teorema 1.19, existen $pa, pb \subset cl(K_n)$. Sea r el máximo punto que pertenece a $pa \cap pb$. Notemos que $r \neq p$, pues $a, b \in K_n$. Así, por el Lema 1.39, $r \in R[cl(K_n)]$ y por lo tanto en $r \in R[X] \setminus \{p\}$, lo cual es una contradicción. Se sigue que, $|E[cl(K_n)]| = 2$ y por el Teorema 1.14, tenemos que $cl(K_n)$ es un arco. Por lo tanto, el dendroide X es F_ω.

Ahora, si el dendroide X es F_ω, entonces tomamos el arco con diámetro máximo y realizamos una construcción similar a la de la Notación 3.9 y por el Teorema 3.10, concluimos que $d_{CDH}(X) = \omega$. □

4.1. Fuertemente homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables

En esta última sección trabajamos con espacios fuertemente homogéneos respecto a subconjuntos densos numerables, los cuales fueron introducidos por Gerald S. Ungar en 1978 (véase [10]). Además, mostramos que un espacio fuertemente homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables, en particular, es homogéneo (véase Teorema 4.10). Por último, concluimos el trabajo caracterizando esta clase de espacios como la clases de espacios numerables y discretos (véase Teorema 4.11). Primero, veamos la definición de espacio fuertemente homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables.

4.9 Definición. Un espacio X es *fuertemente homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables* si es separable y para cualesquiera dos densos numerables de X, digamos $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(d_n) = e_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

En el siguiente resultado probamos que todo espacio fuertemente homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables es homogéneo.

4.10 Lema. *Si X es fuertemente homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables, entonces X es homogéneo.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ y fijemos $N \in \mathcal{D}_X$. Tomando $D = N \cup \{x\}$ y $E = N \cup \{y\}$; notemos que $D, E \in \mathcal{D}_X$. Supongamos que $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $d_1 = x$ y $e_1 = y$. Entonces existe un homemorfismo $h : X \to X$ tal que $h(d_1) = e_1$ es decir, $h(x) = y$. Por lo tanto, X es homogéneo. □

Finalmente, probemos que en un espacio T_1 el ser discreto y numerable es equivalente a ser un espacio fuertemente homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables.

4.11 Teorema. *Sea X un espacio T_1. Entonces X es fuertemente homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables si y sólo si X es numerable y discreto.*

Demostración. Si X es fuertemente homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables entonces, por el Lema 4.10, X es homogéneo. Fijemos un $N \in \mathcal{D}_X$.

Si X no es discreto entonces, por el Teorema 1.2, $X = X'$. Fijemos $x, y \in X$ distintos y tomemos $D = N \setminus \{x, y\}$, digamos $D = \{d_n : n \geq 2\}$. Debido a que $X = X'$, tenemos que $D \in \mathcal{D}_X$. Luego, definimos a $e_1 = y, d_1 = x$ y $e_n = d_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, definimos $D_1 = \{d_1\} \cup \{d_n : n \geq 2\}$ y $E = \{e_1\} \cup \{e_n : n \geq 2\}$; notemos que $D_1, E \in \mathcal{D}_X$. Observemos que si existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(d_1) = e_1$ y $h(d_n) = e_n$ para todo $n \geq 2$, entonces $h \restriction_D$ es la identidad. Dado que $D \in \mathcal{D}_X$ tenemos que h es la función identidad. Entonces $x = h(x) = h(d_1) = e_1 = y$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es discreto. Así, el singletón $\{x\}$ es

abierto en X, para todo $x \in X$. Entonces, $X = N$ y como N es numerable, concluimos que X es numerable.

Por otro lado, si X es discreto y numerable. Sean $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ densos numerables. Podemos definir una función $h : X \to X$ tal que $h(d_n) = e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que X es discreto, obtenemos que h es un homeomorfismo. Por lo tanto, X es fuertemente homogéneo respecto a subconjuntos densos numerables. □

Bibliografía

[1] A. Illanes, S.B. Nadler Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Math., vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[2] A. V. Arhangel'skii and J. van Mill, *Topological Homogeneity*, en: Recent Progress in General Topology III, Atlantis Press, Amsterdam, 2013, 1–68.

[3] B. Fitzpatrick Jr. *A note on countable dense homogeneity*. In: Fund. Math. 75.1 (1972), pp. 33–34.

[4] B. Fitzpatrick Jr. and N. F. Lauer. *Densely homogeneous spaces*. In: Houston J. Math. 13.1 (1987), pp. 19–25. ISSN: 0362-1588.

[5] B. Fitzpatrick Jr., J. M. S. White, and H. X. Zhou. *Homogeneity and σ-discrete sets*. In: Proceedings of the Symposium on General Topology and Applications (Oxford, 1989). Vol. 44. 1-3. 1992, pp. 143–147.

[6] B. Fitzpatrick, Jr., and H.-X. Zhou, *Some open problems in densely homogeneous spaces*, en: Open Problems in Topology, J. van Mill and M. Reed (eds.), NorthHolland, Amsterdam, 1984, 251–259.

[7] C. G. Laveaga, *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos (cardinales y ordinales)* México: Universidad Autónoma de México, 2007.

[8] G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Math. Ann. 46 (1895) 481-512.

[9] G. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, R1, 1942.

[10] G.S. Ungar, *Countable dense homogeneity and n-homogeneity*, Fundam. Math. 99 (1978) 155–160.

[11] H. M. Gehman, *Concerning the subsets of a plane continuous curve*, Ann. of Math. 27 (1925), 29-46.

[12] Hart, K. P., Nagata, J., & Vaughan, J. E. (Eds.) (2004). *Encyclopedia of General Topology*. Elsevier.

[13] J. Dugundji, *Topology*, Series in Advanced Mathematics, Allyn and Bacon, Inc., 1996.

[14] J.G. Hocking y G.S. Young, *Topology*,Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass., 1961.

[15] J. J. Charatonik, Bosquejo de la historia de la teoría de los continuos, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, editado por R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez. Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 31(2006), 225-264.

[16] J.J. Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Matemáticas, XX Congreso de la SMM, Serie de Comunicaciones, 22 (1998), 227-253.

[17] J. Kennedy, *A weaker form of countable dense homogeneity*, Houst. J. Math. 3 (1) (1977) 89–97.

[18] J. Kennedy, *More on a weaker form of countable dense homogeneity*, Houst. J. Math. 10 (4) (1984) 507-524.

[19] J. van Mill. *A countable dense homogeneous space with a dense rigid open subspace*. In: Fund. Math. 201.1 (2008), pp. 91–98. ISSN: 0016-2736.

[20] J. van Mill. *On countable dense and strong local homogeneity*. In: Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 53.4 (2005), pp. 401–408. ISSN: 0239-7269.

[21] M. Hrušák, J. van Mill, *Nearly countable dense homogeneous spaces*, Can. J. Math. 66 (2014) 743–758.

[22] R. Bennet, *Countable dense homogeneous spaces*. IN: Fund. Math. 74.3 (1972), pp. 189-194.

[23] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warsaw, 1977.

[24] M. G. Raggi, J. A. Escamilla and F. J. Mendoza, *Introducción a la teoría de espacios métricos*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2010.

[25] R. Hernández-Gutiérrez, *Countable dense homogeneity and the double arrow space*, Topol. Appl. 160 (2013) 1123–1128.

[26] R. J. Hernández, *Dendritas*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, U. N. A. M., México D. F. 2007.

[27] R.E. García; M. J. López & P. Pellicer, *Countable dense sets of dendrites*, Topology and its Applications, vol.336 (2023)

[28] S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol 158. New York: Marcel Dekker, Inc., 1992.

[29] S. B. Nadler Jr., *Locating cones and Hilbert cubes in hyperspaces*, Fund. Math., 79, 1973, 245-246.